Homogenización en un sistema de tipo Leontief (Leontief-Sraffa): propiedades relevantes de la inversa y "razón estructural"

Quiñoa, Xosé Luís*; Pié, Laia

[a] Departamento de Economía Cuantitativa, Universidad de Santiago de Compostela, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
C/ Burgo das Nacións, s/n, Santiago de Compostela, Spain
Teléfono. +34 8818 1151. *E-mail:* joseluis.quinoa@usc.es

[b] Departamento de Economía Aplicada, Universidad Autónoma de Barcelona, Facultad de Economía y Empresa Edificio B- Campus de Bellaterra, 08193 Bellaterra, Spain
Teléfono: +34 93 581 4582. *Fax:* +34 93 581 2292. *E-mail:* laia.pie@uab.cat

*Autor de contacto

Resumen

Dado un sistema tipo Leontief (o Leontief - Sraffa), se demuestra que puede ser transformado en uno *estructuralmente equivalente* que denominaremos *sistema homogeneizado* en el que la matriz tecnológica A así como la inversa de Leontief poseen propiedades matemáticas relevantes relacionadas con el autovalor máximo $\bar{a}$ de A. Las matrices $I-(1+\Pi)A$, $\quad 0 \leq \Pi < \frac{1}{\bar{a}}-1$ son de diagonal dominante por columnas.

Para un sistema homogeneizado es condición necesaria y suficiente para que los precios relativos en el sentido Sraffa permanezcan invariantes al modificar el tipo de beneficio, que los coeficientes de trabajo directo sean iguales. Asimismo para este tipo de sistemas, la razón entre la suma de las mercancías que componen el excedente y la suma de las mercancías utilizadas como medios de producción coincide con el tipo máximo de beneficio $\tilde{\Pi} = \frac{1}{\bar{a}}-1$, es lo que Sraffa denomino "razón patrón" (global) en su Sistema Patrón.

Palabras clave: Homogeneización, sistema de Leontief, Leontief-Sraffa, tipo de beneficio, excedente, capital, trabajo.
Área temática: 2. Aspectos metodológicos en el análisis input-output

1. INTRODUCCIÓN

En el transcurso del análisis utilizaremos las notaciones siguientes:

1) $\left(q_{ij}\right)=\begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & q_{ij} & \cdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$

representa la matriz de transacciones interindustriales; q_{ij} denota la cantidad física de mercancía i utilizada por la industria j en el período de tiempo considerado (por ejemplo, un año).

2) $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

es el vector columna que representa el excedente del sistema; así, β_i es el excedente de la industria i y suponemos que existe al menos una industria i para la que $\beta_i > 0$.

3) $Q_i = q_{i1} + \ldots + q_{ij} + \ldots + q_{in} + \beta_i$ denota la producción total de la industria i en el período considerado. Denotando $q_i = q_{i1} + \ldots + q_{in}$ (consumos intermedios de la industria i), tenemos, entonces,

$$Q_i = q_i + \beta_i \qquad\qquad Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}$$

representa el vector columna de producción total del sistema.

4) $(L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_n)$ denota el vector fila de las cantidades de trabajo utilizadas por cada industria; L_i representa la cantidad de unidades de trabajo utilizadas por la industria i. Suponemos que el trabajo es uniforme en calidad o que cualquier diferencia en calidad ha sido reducida a diferencias en cantidad.

5) Como es habitual en este tipo de análisis, $A = (a_{ij})$ denota la matriz cuadrada $n \times n$,

definida por $a_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j}$; a_{ij} es, pues, la cantidad física de mercancía *i* utilizada en la producción de una unidad de mercancía j.

6) Asimismo, $l_i = \frac{L_i}{Q_i}$ representa la cantidad de trabajo utilizada en la producción de una unidad de mercancía *i*. $l = (l_1,\ldots, l_i,\ldots, l_n)$ es el vector fila de los coeficientes de trabajo.

Para simplificar llamaremos a $\begin{bmatrix} A \\ l \end{bmatrix}$ "técnica del sistema". Por comodidad, para representar explícitamente el problema utilizaremos el tablero:

$$\left[\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1j} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nj} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \overline{L_1} & & \overline{L_j} & & \overline{L_n} \end{matrix} & & \end{array}\right] \tag{1}$$

2. EL SISTEMA DE PRECIOS DE SRAFFA

Comenzaremos utilizando las mismas hipótesis de partida del propio Sraffa, que pueden ser resumidas en:

1) El sistema económico se encuentra en estado estacionario. Produce cada año la misma cantidad de mercancías.
2) Cada industria produce una sola mercancía mediante el empleo de trabajo y mercancías. Una parte de la producción total deberá ser destinada a reemplazar las mercancías que han sido utilizadas y el resto –el excedente– se destinará al consumo.
3) El valor añadido del sistema económico o valor del excedente se distribuye al final del período en forma de salarios y beneficios: los salarios en proporción a la cantidad física de trabajo empleada y los beneficios en proporción al valor de los medios de producción empleados por cada industria.

Cabe señalar que el propio Sraffa distingue dos aspectos en los salarios:[1]

a) Como elemento de subsistencia.

b) Como participación en la producción excedente.

2.1. FORMULACIÓN DEL SISTEMA DE PRECIOS

Denotando $p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n$ los precios de las mercancías 1, 2,…, n; Π el tipo de beneficio y w el salario unitario y con notaciones de (1), siguiendo a Sraffa tenemos:

$$\begin{cases} q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \ldots + q_{n1}p_n + \Pi\left(q_{11}p_1 + \ldots + q_{n1}p_n\right) + L_1 w = Q_1 p_1 \\ \ldots \\ q_{1j}p_1 + q_{2j}p_2 + \ldots + q_{nj}p_n + \Pi\left(q_{1j}p_1 + \ldots + q_{nj}p_n\right) + L_j w = Q_j p_j \\ \ldots \\ q_{1n}p_1 + \ldots + q_{nn}p_n + \Pi\left(q_{1n}p_1 + \ldots + q_{nn}p_n\right) + L_n w = Q_n p_n \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

Dividiendo los dos términos de cada ecuación j por el término Q_j correspondiente y reagrupando queda:

$$\begin{cases} (1+\Pi)a_{11} + (1+\Pi)a_{21} + \ldots + (1+\Pi)a_{n1} + l_1 w = p_1 \\ \ldots \\ (1+\Pi)a_{1j} + (1+\Pi)a_{2j} + \ldots + (1+\Pi)a_{nj} + l_j w = p_j \\ \ldots \\ (1+\Pi)a_{1n} + (1+\Pi)a_{2n} + \ldots + (1+\Pi)a_{nn} + l_n w = p_n \end{cases} \quad \textbf{(3)}$$

o, matricialmente,

$$p\left[I - (1+\Pi)A\right] = lw \quad \textbf{(4)}$$

sistema de n ecuaciones y n+2 incógnitas:

$$\Pi,\ w,\ p_1, \ldots, p_n$$

[1] *"A la vista de este doble carácter de los salarios, sería apropiado, cuando vengamos a considerar la división del excedente en capitalistas y trabajadores, separar las dos partes que componen el salario y considerar sólo la parte del «excedente» como variable, en tanto que los bienes necesarios para la subsistencia de los trabajadores continuarían apareciendo entre los medios de producción, con el petróleo, etc.*" (Sraffa, 8). "*También supondremos en lo sucesivo que el salario se paga «post factum» como una participación del producto anual, abandonándose así la idea de los economistas clásicos de un salario «avanzado» desde el capital. Retenemos, sin embargo, el supuesto de un ciclo anual de producción con un mercado anual*" (Sraffa, 9).

lo cual significa que deberán fijarse dos de ellas para que el sistema se haga determinado.

3. LIMITACIONES DEL TIPO DE BENEFICIO

El sistema (4) puede escribirse como

$$p\,(1+\Pi)\left[\frac{1}{1+\Pi}I - A\right] = lw$$

o, si se prefiere, como

$$p\left(\frac{1}{1+\Pi}I - A\right) = \frac{l}{1+\Pi}w \qquad \textbf{(5)}$$

La matriz A es por construcción positiva ($a_{ij} \geq 0,\ 1 \leq i \leq n,\ \ 1 \leq j \leq n$) y admite un autovalor máximo $\bar{a}$ positivo. Sabemos que $\forall\ \lambda \in$ R, $\lambda > \bar{a}$, tenemos que ($\lambda\ I - A$) es inversible y que su inversa es positiva. Entonces, para que (4) o (5) tengan solución con significado económico debe ser $\frac{1}{1+\Pi} > \bar{a}$ o bien $\Pi < \frac{1}{\bar{a}} - 1$.

4. REPARTO DEL EXCEDENTE ENTRE LA "SOCIEDAD" DE LOS CAPITALISTAS Y LA "SOCIEDAD" DE LOS TRABAJADORES

Denotando

$$L = \sum_{i=1}^{n} l_i, \qquad q_i = q_{i1} + ... + q_{in} \qquad Q_i = q_i + \beta_i$$

y sumando por columnas los dos miembros de las ecuaciones (2), tenemos:

$$q_1\,p_1 + ... + q_n\,p_n + \Pi\,(q_1\,p_1 + ... + q_n\,p_n) + Lw = (q_1+\beta_1)\,p_1 + ... + (q_n+\beta_n)\,p_n$$

de donde resulta

$$\Pi\,(q_1\,p_1 + ... + q_n\,p_n) + Lw = \beta_1\,p_1 + ... + \beta_n\,p_n \qquad \textbf{(6)}$$

En el caso extremo en que $\Pi = 0$, resulta $Lw = \beta_1 p_1 + ... + \beta_n p_n$ y para $w = 1$ tenemos que el valor del excedente coincide precisamente con la cantidad total L de trabajo empleado; como consecuencia, todo el excedente va a parar a los trabajadores. Es ese caso, la ecuación (4) : $p\,(I - A) = lw$ tiene como solución (haciendo $w = 1$), que denotaremos

$$v = l\,(I - A)^{-1} \quad \text{que es a lo que Marx denominaba “valores”.} \qquad (7)$$

5. HOMOGENEIZACIÓN DE LAS UNIDADES

Consideremos el problema descrito en el tablero (1); la fila i, $1 \le i \le n$, es representativa de la mercancía i; así, q_{ij} es la cantidad física de unidades de mercancía i utilizadas por la industria j en el período considerado –por ejemplo, quilos de trigo, y nada impide medir estas unidades en toneladas en vez de en quilos–; lo mismo se puede decir para el resto de las mercancías.

Sea

$$r = (r_1, ..., r_i, ..., r_\text{n}) \in \text{R}^n, \quad r > 0 \text{ (e.d.: } r_i > 0 \ \ \forall i)$$

y transformemos el tablero (1) en:

$$\left[\begin{array}{ccccccc} & & (q'_{ij}) & & & \beta' & Q' \\ & & & & & & \\ \left(\begin{array}{c} r_1 q_{11} \\ r_2 q_{21} \\ \vdots \\ r_n q_{n1} \end{array}\right. & \begin{array}{c} ... \\ ... \\ \\ ... \end{array} & \begin{array}{c} r_1 q_{1i} \\ r_2 q_{2i} \\ \\ r_n q_{ni} \end{array} & \begin{array}{c} ... \\ ... \\ \\ ... \end{array} & \left.\begin{array}{c} r_1 q_{1n} \\ r_2 q_{2n} \\ \\ r_n q_{nn} \end{array}\right) & \begin{array}{c} \overline{r_1\beta_1} \\ r_2\beta_2 \\ \\ r_n\beta_n \end{array} & \begin{array}{c} \overline{r_1 Q_1} \\ r_2 Q_2 \\ \\ r_n Q_n \end{array} \\ & & & & & & \\ L_1 & & L_i & & L_n & & \end{array}\right] \qquad (9)$$

Entonces, siendo w el salario unitario y Π el tipo de beneficio, tenemos el sistema

$$\begin{cases} (1+\Pi)(r_1\, q_{11}\, p_1 + r_2\, q_{21}\, p_2 + ... + r_n\, q_{n1}\, p_n + L_1 w = r_1\, Q_1\, p_1 \\ ... \\ (1+\Pi)(r_1\, q_{1i}\, p_1 + r_2\, q_{2i}\, p_2 + ... + r_n\, q_{ni}\, p_n + L_i w = r_i\, Q_i\, p_i \\ ... \\ (1+\Pi)(r_1\, q_{1n}\, p_1 + r_2\, q_{2n}\, p_2 + ... + r_n\, q_{nn}\, p_n + L_n w = r_n\, Q_n\, p_n \end{cases}$$

y dividiendo los dos miembros de cada ecuación i por $r_i Q_i$:

$$\left\{(1+\Pi)\left(\frac{r_1}{r_i}a_{1i}\ p_1+\ldots+\frac{r_i}{r_i}a_{ii}\ p_i+\ldots+\frac{r_n}{r_i}a_{ni}\ p_n+\frac{L_i w}{r_i Q_i}\right)=p_i \qquad 1\le i\le n\right.$$

y poniendo

$$a'_{ij}=\frac{r_i}{r_j}a_{ij}\,,\qquad A'=\left(a'_{ij}\right),\qquad l'_i=\frac{L_i}{r_i\,Q_i}\,,\qquad l'=\left(l'_1,\ldots,l'_i,\ldots,l'_n\right)$$

$$\left\{(1+\Pi)\left(a'_{1i}\ p_1+\ldots+a'_{ii}\ p_i+\ldots+a'_{ni}\ p_n\right)+l'_i=p_i \qquad 1\le i\le n\right.$$

o aún

$$\left\{-a'_{1i}p_1-\ldots+\left(1-a'_{ii}\right)p_i-\ldots-a'_{ni}p_n=l'_i \qquad 1\le i\le n\right.$$

lo que se traduce matricialmente por:

$$p\left[I-(1+\Pi)\,A'\right]=l' \tag{10}$$

Cabe resaltar que el planteamiento anterior es estructuralmente idéntico al original, pues lo único que hemos hecho fue modificar las unidades de medida de las mercancías; como consecuencia, queda modificada la cantidad de trabajo por unidad (el vector l) y, por tanto, también el precio de cada unidad (el vector p), pero sin alterar para nada la estructura del problema planteado.

Como vimos anteriormente, la matriz tecnológica $A = (a_{ij})$ se transforma en $A'=\left(a'_{ij}\right)$ con $a'_{ij}=\frac{r_i}{r_j}a_{ij}$ y este es, precisamente, nuestro objetivo: buscar $r\in \mathrm{R}^n$ (r>0), lo que nos permitirá un cambio de unidades, de modo que la nueva matriz tecnológica tenga propiedades matemáticas que faciliten el desarrollo analítico de los distintos problemas que se presentan en el análisis.

El primer resultado sencillo es:

Proposición: Los autovalores de A' son los mismos que los de A y en particular el autovalor máximo.

En efecto, denotemos $\hat{r}$ la matriz diagonal

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & r_n \end{pmatrix}$$

entonces, mediante un cálculo sencillo,

$$A' = \hat{r}\, A\, \hat{r}^{-1}$$

y

$$\lambda\, I - A' = \hat{r}\, \lambda\, I\, \hat{r}^{-1} - \hat{r}\, A\, \hat{r}^{-1} = \hat{r}\, (\lambda\, I - A)\, \hat{r}^{-1}$$

y

$$\det\, (\lambda\, I - A') = \det\, \hat{r} \cdot \det\, (\lambda\, I - A) \cdot \det\, \hat{r}^{-1} = \det\, (\lambda\, I - A)$$

de donde

$$\det\, (\lambda\, I - A') = 0 \Leftrightarrow \det\, (\lambda\, I - A) = 0$$

y los autovalores coinciden.

5.1. UN CASO PARTICULAR IMPORTANTE

Si el sistema económico presenta algún tipo de excedente, entonces sabemos que el autovalor máximo $\overline{a}$ de la matriz tecnológica A es estrictamente menor que 1 $(\overline{a} < 1)$ al cual, *si A es irreducible* corresponde un *autovector por la izquierda* $r > 0$, y tenemos $rA = \overline{a}\, r$.

Entonces, tenemos que $\forall i,\ 1 \leq i \leq n$:

$$r_1\, a_{1i} + \dots + r_i\, a_{ii} + \dots + r_n\, a_{ni} = \overline{a}\, r_i$$

es decir,

$$\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ \frac{r_1}{r_i} a_{1i} + \dots + \frac{r_i}{r_i} a_{ii} + \dots + \frac{r_n}{r_i} a_{ni} = \overline{a}$$

o aún,

$$a'_{1i} + \dots + a'_{ii} + \dots + a'_{ni} = \overline{a}, \quad 1 \leq i \leq n \qquad \textbf{(11)}$$

de donde la nueva matriz tecnológica A' tiene la propiedad de que

$$\forall i,\ \ 1 \le i \le n,\ \ \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \overline{a}$$

lo que supone que los vectores columna de A' suman todos lo mismo, a saber $\overline{a}$ autovalor máximo de A' (y de A).

Por otra parte, dado que

$$\forall i,\ \ 1 \le i \le n \quad \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \overline{a}$$

Dado que *Mn* (R) conjunto de las matrices cuadradas de orden n es un espacio vectorial sobre R, se demuestra fácilmente que las aplicaciones

$$Mn\,(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}_{+} = \{x \in \mathrm{R} \,/\, x \ge 0\}$$

$$\text{a) } A = (a_{ij}) \to \|A\| = \sup_{j} \sum_{i=1}^{n} |\,a_{ij}|$$

$$\text{b) } A = (a_{ij}) \to \|A\|^{*} = \sup_{i} \sum_{j=1}^{n} |\,a_{ij}|$$

son normas en *Mn* (R), tenemos también $\sup_{i} \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \|A'\| = \overline{a}$ por lo que la norma de A' es igual a $\overline{a}$ y el vector $\overline{1} = (1,...,1)$ es autovector por la izquierda de A'. Ello significa económicamente que, haciendo abstracción de la componente trabajo en el sistema, las mercancías se intercambiarían una a una.

Por otra parte, de (11) deducimos:

$$1 - a'_{ii} - \sum_{j \ne i} a'_{ji} = 1 - \overline{a} > 0$$

o bien

$$1 - a'_{ii} = (1 - \overline{a}) + \sum_{j \ne i} a'_{ji}$$

y como $1 - \overline{a} > 0$,

$$1 - a'_{ii} > \sum_{j \ne i} a'_{ji}$$

y la matriz $I - A'$ es de Leontief diagonal dominante por columnas.[2]

Consideremos ahora una tasa de beneficio Π, $\left(0 \le \Pi < \frac{1}{\bar{a}} - 1\right)$, como r es autovector izquierdo de A,

$$r\,A = \bar{a}\,r$$

y

$$r\,(1+\Pi)\,A = (1+\Pi)\,\bar{a}\,r$$

por lo que $(1+\Pi)\bar{a}$ es autovalor de (1 + Π) A, que admite r como autovector izquierdo.

Multiplicando por 1+Π los dos miembros de (11), resulta $\forall i, \quad 1 \le i \le n$:

$$(1+\Pi)\,a'_{1i} + (1+\Pi)\,a'_{2i} + \ldots + (1+\Pi)\,a'_{ni} = (1+\Pi)\,\bar{a}$$

$$1 - (1+\Pi)\,a'_{ii} - \sum_{j \ne i} (1+\Pi)\,a'_{ji} = 1 - (1+\Pi)\,\bar{a}$$

o aún:

$$1 - (1+\Pi)\,a'_{ii} = \left(1 - (1+\Pi)\,\bar{a}\right) + \sum_{j \ne i} (1+\Pi)\,a'_{ji}, \quad 1 \le i \le n$$

y siendo

$$1 - (1+\Pi)\,\bar{a} > 0 \quad \left(\text{porque } \Pi < \frac{1}{\bar{a}} - 1\right)$$

resulta que la matriz $I - (1+\Pi)\,A'$ es también Leontief diagonal dominante por columnas.

Lo anterior podemos resumirlo en la siguiente proposición.

(*)12 *Proposición*: Todo sistema tipo Leontief (o Leontief-Sraffa) con técnica $\begin{bmatrix} A \\ l \end{bmatrix}$ puede ser transformado en uno estructuralmente equivalente $\begin{bmatrix} A' \\ l' \end{bmatrix}$, que tiene las

[2] Decimos que (α_{ij}) matriz cuadrada de orden n es Leontief diagonal dominante por columnas si:
1) $\alpha_{ii} > 0$ y $\alpha_{ij} \le 0$ si $i \ne j$ (Leontief)
2) $\forall i, \quad 1 \le i \le n \quad \alpha_{ii} > \sum_{j \ne i} \left|\alpha_{ji}\right|$ (Diagonal dominante por columnas)

siguientes propiedades:

a) Los autovalores de A' son los mismos que los de A (y, por lo tanto, el autovalor máximo $\overline{a}$).

b) $\forall i, \quad 1 \le i \le n \quad \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \overline{a}$ (las columnas de A' suman todas $\overline{a}$) y, por lo tanto, la norma de A', $\|A'\| = \sup_{i} \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} = \overline{a}$.

c) $\forall \Pi, \quad 0 \le \Pi \le \frac{1}{\overline{a}} - 1$, las columnas de $(1+\Pi)A'$ suman todas $(1+\Pi)\overline{a}$; $\|(1+\Pi)A'\| = (1+\Pi)\overline{a}$ y la matriz $I - (1+\Pi)A'$ es Leontief diagonal dominante por columnas.

En lo que sigue, y salvo mención expresa que diga lo contrario, denotaremos A en lugar de A', l en lugar de l', etc., es decir, suponemos que la técnica del sistema ha sido previamente homogeneizada, de modo que en particular la matriz tecnológica A es tal que $\forall i, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ji} = \overline{a}$.

5.2. ALGUNAS PROPIEDADES RELEVANTES DE ESTE TIPO DE MATRICES

1) Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrices cuadradas de orden n, tales que $\forall j, \ 1 \le j \le n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = b$$

poniendo $A \cdot B = (\gamma_{ij})$ con $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$, tenemos $\forall j, \ 1 \le j \le n$,

$$\sum_{i} \gamma_{ij} = \sum_{i} \left(\sum_{k} a_{ik}\, b_{kj} \right) = \sum_{k} b_{kj} \left(\sum_{i} a_{ik} \right) = a \left(\sum_{k} b_{kj} \right) = ab$$

y para este tipo de matrices se verifica

$$\|A \cdot B\| = \|A\| \cdot \|B\|$$

de lo que se deduce en particular

$$\left\|A^n\right\| = \|A\|^n = a^n \tag{13}$$

2) La suma de los elementos de cada columna de la matriz homogeneizada A es $\overline{a} < 1$ o, lo que es lo mismo, $\|A\| = \overline{a} < 1$.

Entonces, un resultado clásico nos indica

$$(I - A)^{-1} = I + A + ... + A^n + ...$$

y entonces $\forall j,\ 1 \leq j \leq n$ la suma de los elementos de la columna j de $(I - A)^{-1}$ será:

$$1 + \overline{a} + ... + \overline{a}^n + ... = \frac{1}{1 - \overline{a}}$$

de lo que se deduce también

$$\left\|(I - A)^{-1}\right\| = \frac{1}{1 - \overline{a}} \tag{14}$$

Por un razonamiento análogo, dada una tasa de beneficio Π, $0 \leq \Pi < \frac{1}{\overline{a}} - 1$, la suma de los elementos de cada columna j de $(I - (1 + \Pi)A)^{-1}$ es

$$\frac{1}{1 - (1 + \Pi)\overline{a}}$$

por lo que

$$\left\|(I - (1 + \Pi)A)^{-1}\right\| = \frac{1}{1 - (1 + \Pi)\overline{a}}$$

5.3. PROPIEDADES DE LA INVERSA (I –(1 + Π) A)$^{-1}$ NORMALIZADA

Pongamos ahora,

$$p\left(\frac{1}{1 + \Pi} I - A\right) = \frac{l}{1 + \Pi} w$$

$$\alpha(\Pi)=\left(\alpha_{ij}(\Pi)\right)=\left(I-(1+\Pi)A\right)^{-1},$$

y

$$p(\Pi)=lw\alpha(\Pi)=lw\left(I-(1+\Pi)A\right)^{-1}$$

denotemos:

$$\left(\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)\right)=\frac{\alpha_{ij}(\Pi)}{\left\|\alpha_{ij}(\Pi)\right\|}$$

Como $\left\|\alpha_{ij}(\Pi)\right\|=\dfrac{1}{1-(1+\Pi)\bar{a}}$ (A es homogenizada) tenemos que la matriz $\left(\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)\right)$ es tal que $\left\|\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)\right\|=1$ o lo que es lo mismo, $\forall j$, $(1\le j\le n)$ $\sum_i \tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)=1$ (la suma de los elementos de cada columna de $\left(\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)\right)$ es uno), por lo que existe

$$\lim_{\Pi\longrightarrow\tilde{\Pi}}\tilde{\alpha}_{ij}(\Pi)=\left(\tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi})\right)$$

Si denotamos

$$\tilde{p}(\Pi)=lw\frac{\left(I-(1+\Pi)A\right)^{-1}}{\dfrac{1}{1-(1+\Pi)\bar{a}}}$$

Tenemos:

$$\tilde{p}(\Pi)=lw\left(1-(1+\Pi)\bar{a}\right)\left(I-(1+\Pi)A\right)^{-1} \qquad \textbf{(15)}$$

o multiplicando los dos miembros por $I-(1+\Pi)A$:

$$\tilde{p}(\Pi)\left(I-(1+\Pi)A\right)=lw\left(1-(1+\Pi)\bar{a}\right) \qquad \textbf{(16)}$$

y tomando limites en los miembros cuando $\Pi\longrightarrow\tilde{\Pi}=\dfrac{1}{\bar{a}}-1$ queda $\tilde{p}(\tilde{\Pi})\left(I-\dfrac{1}{\bar{a}}A\right)=0$ o lo que es lo mismo $\tilde{p}(\tilde{\Pi})\left(\bar{a}I-A\right)=0$; ahora bien, siendo $\forall j$, $\sum_i \tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi})=1$ tenemos:

$$\tilde{p}_i(\tilde{\Pi})=l_1\tilde{\alpha}_{ij}(\tilde{\Pi})+\ldots+l_n\tilde{\alpha}_{nj}(\tilde{\Pi})$$

$$\tilde{p}_j\left(\tilde{\Pi}\right) \leq \left(\inf_i l_i\right)\left(\sum_i \tilde{\alpha}_{ij}\left(\tilde{\Pi}\right)\right) = \inf_i l_i > 0$$

y también $\tilde{p}_j\left(\tilde{\Pi}\right) \leq \left(\sup_i l_i\right)\left(\sum_i \tilde{\alpha}_{ij}\left(\tilde{\Pi}\right)\right) = \sup_i l_i < +\infty$

por lo que podemos concluir que $\tilde{p}\left(\tilde{\Pi}\right)$ es autovector izquierdo de A asociado al autovalor máximo $\bar{a}$ y siendo A homogenizada, $\tilde{p}\left(\tilde{\Pi}\right)$es de la forma $(\alpha,\alpha,\ldots,\alpha)$ con $\alpha > 0$; es decir, cuando Π tiende a $\tilde{\Pi}$ los precios relativos tienden a ser todos iguales. Es un resultado que no bebería sorprendernos demasiado puesto que cuando Π tiende al tipo máximo de beneficio, la proporción de producto neto que va al trabajo tiende a cero y nos encontramos en una situación igual a cuando los coeficientes de trabajo directo l_i fueran iguales a cero.

De lo anterior se deducen una serie de propiedades interesantes de la matriz $\tilde{\alpha}_{ij}\left(\tilde{\Pi}\right)$:

a) De (6) tenemos:

$$\Pi\left(q_1 p_1 + \ldots\ldots + q_n p_n\right) + Lw = \beta_1 p_1 + \ldots\ldots + \beta_n p_n$$

Cuando Π tiende a $\tilde{\Pi}$, $\tilde{p}_i(\Pi)$tiende a $\tilde{p}_i\left(\tilde{\Pi}\right)$, Lw tiende a cero, por lo que, siendo los $\tilde{p}_i\left(\tilde{\Pi}\right)$ todos iguales, y poniendo $\tilde{p}_i\left(\tilde{\Pi}\right) = \tilde{p}$, tenemos:

$$\tilde{\Pi}\,\tilde{p}\left(\sum_i q_i\right) = \tilde{\Pi}\,\tilde{p}\left(\sum_{i,j} q_{ij}\right) = \tilde{p}\left(\sum_i \beta_i\right)$$

o lo que es lo mismo

$$\tilde{\Pi} = \frac{\sum_i \beta_i}{\sum_{i,j} q_{ij}} \qquad \textbf{(17)}$$

por lo que concluimos que en un sistema homogeneizado la razón entre excedente global y la suma de los medios de producción utilizados coinciden con el tipo máximo de beneficio. Es lo que Sraffa denomina *razón patrón (global)* para los sistemas patrón.[3]

5.4. CONDICIÓN NECESARIA DE IGUALDAD DE PRECIOS PARA DISTINTOS TIPOS DE BENEFICIOS

Estudiamos ahora qué condiciones deben darse en un sistema homogenizado para que a distintos tipos de beneficio Π y Π' correspondan precios relativos iguales $\tilde{p}(\Pi) = \tilde{p}(\Pi') = \tilde{p}$.

En primer lugar, los precios relativos del tipo $p_i(\Pi)$ son idénticos a los de tipo $\tilde{p}_i(\Pi)$, en efecto si $0 \le \Pi \le \tilde{\Pi}$, tenemos:

$$\frac{\tilde{p}_i(\Pi)}{\sum_i \tilde{p}_i(\Pi)} = \frac{p_i(\Pi)(1-(1+\Pi)\bar{a})}{\left(\sum_i p_i(\Pi)\right)(1-(1+\Pi)\bar{a})} = \frac{p_i(\Pi)}{\sum_i p_i(\Pi)}$$

y cuando $\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}$, los límites del numerador y del denominador existen y son distintos de cero. Tenemos:

$$\frac{\tilde{p}_i(\tilde{\Pi})}{\sum_i \tilde{p}_i(\tilde{\Pi})} = \lim_{\Pi \longrightarrow \tilde{\Pi}} \frac{p_i(\Pi)}{\sum_i p_i(\Pi)}$$

por lo que tenemos que los precios relativos $p_i(\Pi)$ son los mismos que los $\tilde{p}_i(\Pi)$ incluso cuando $\Pi = \tilde{\Pi}$.

Si $\tilde{p}(\Pi) = \tilde{p}(\Pi') = \tilde{p}$, de (16) tenemos:

$$\tilde{p}\,(I-(1+\Pi)A) = lw\,(1-(1+\Pi)\bar{a})$$
$$\tilde{p}\,(I-(1+\Pi')A) = lw\,(1-(1+\Pi')\bar{a})$$

de donde y mediante cálculos elementales se obtiene:

[3] Ver Sraffa (1975): Capitulo 4: “La mercancía patrón” del libro “Producción de mercancías por medio de mercancías”.

$\frac{\Pi-\Pi'}{\left(1-(1+\Pi)\overline{a}\right)\left(1-(1+\Pi')\overline{a}\right)}\tilde{p}(\overline{a}I-A)=0$ o aun $\tilde{p}(\overline{a}I-A)=0$ y $\tilde{p}$ es autovector izquierdo de A.

Asimismo, de

$\tilde{p}\,(I-(1+\Pi)A)=lw\left(1-(1+\Pi)\overline{a}\right)$ y siendo $\tilde{p}$ autovector izquierdo, tenemos $\tilde{p}\,(I-(1+\Pi)\overline{a})=lw\left(1-(1+\Pi)\overline{a}\right)$ por lo que $\tilde{p}=lw$ y siendo A homogeneizada los componentes de $\tilde{p}$ son todos iguales por lo que las de l también son iguales.

Ya hemos visto anteriormente que si las componentes l_i del vector l eran iguales, los precios eran iguales para cualquier Π. Podemos pues enunciar:

(18) *Teorema:* En un sistema homogeneizado, es condición necesaria y suficiente para que los precios relativos permanezcan invariantes al modificar Π $\left(0\leq\Pi\leq\tilde{\Pi}\right)$ que los coeficientes de trabajo directo l_i sean iguales.

Supongamos ahora que los coeficientes de trabajo directo son todos iguales a t ; los precios son entonces todos iguales y dependen solo de Π y de w:

$$p_i(\Pi)=\frac{tw}{1-(1+\Pi)\overline{a}}\ ,\ 0\leq\Pi\leq\tilde{\Pi}\,,$$

de (6) tenemos:

$$\Pi\, p_i(\Pi)\left(\sum_{i,j}q_{ij}\right)+Lw=p_i(\Pi)\left(\sum_i\beta_i\right) \tag{19}$$

dado Π, el valor del producto neto del sistema es $p_i(\Pi)\left(\sum_i\beta_i\right)$. Y el beneficio total de todas las industrias es $\Pi\, p_i(\Pi)\left(\sum_{i,j}q_{ij}\right)$.

Denotamos W la parte del producto neto que va al trabajo. Sabemos que si $\Pi=0$ $p_i(0)\left(\sum_i\beta_i\right)=L$ y entonces $W=1$; por el contrario si $\Pi\longrightarrow\tilde{\Pi}$, $W=0$ por lo que W varía entre cero y uno.

Dividiendo los dos miembros de (19) por $p_i(\Pi)\left(\sum_i \beta_i\right)$ y teniendo en cuenta (17) se obtiene $\frac{\Pi}{\tilde{\Pi}}+W=1$ o aun $\Pi=\tilde{\Pi}(1-W)$ lo que nos proporciona una relación lineal entre el tipo de beneficio Π y la proporción W del producto neto que va a los trabajadores.

REFERENCIAS

DEBREU, G.; HERSTEIN, I.N. (1953): “Non Negative Square Matrices”, *Econometrica*, 21, pp. 597-607.

GANTMACHER (1966): *Thèorie de matrices*, t. 2. Paris: Dunod.

LEONTIEF, V. (1951): *The Structure of American Economy 1919-1929*. New York: Oxford University Press.

MADDOX, J.J. (1980): “Infinite Matrices of Operators”, *Lectures Notes in Mathematics*, 786. Springer Verlag.

MCKENZIE, L. (1959): “Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory”, en Arrow, Karlin y Suppes [ed.]: *Mathematical Methods in the Social Sciences*. Stanford University Press.

PASSINETTI, L. (1983): *Lecciones de teoría de la producción*. Fondo de Cultura Económica.

QUIÑOÁ, J.L. (1983): *Inversibilidad en álgebras de Banach de matrices infinitas y aplicación a los sistemas de ecuaciones de orden infinito*. (Tesis doctoral). Zaragoza.

QUIÑOA, J.L. (1992): “Sur un type de matrice infinie de diagonale dominante dans la thèorie économique”, *European Meeting of the Econometric Society*. Bruselas.

SRAFFA, P. (1975): *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Oikos-tau.