Algunas ideas sobre responsabilidad tecnológica de las estructuras productivas en relación al consumo de energía eléctrica.

***Alcántara Escolano, Vicent*[a] *; Tarancón Morán, Miguel Ángel*[b*]*; del Río González, Pablo*[c]**

[a] *Departamento de Economía Aplicada. Universidad Autónoma de Barcelona. Facultad de Ciencias Económicas. Campus de Bellaterra. 08193-Bellaterra (Cerdanyola). E-mail: vicent.alcantara@uab.es*
[b] *Departamento de Economía Política y Hacienda Pública, Estadística Económica y Empresarial y Política Económica. Universidad de Castilla – La Mancha Facultad de Derecho y CC sociales. Ronda de Toledo, s/n. 13071-Ciudad Real. E-mail: miguelangel.tarancon@uclm.es*
[c] *Instituto de Políticas y Bienes Públicos. Centro de Ciencias Humanas y Sociales. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. C/ Albasanz, 26-28. 28037-Madrid. E-mail: pablo.delrio@cchs.csic.es*

*Autor de contacto

Resumen

Los beneficios de un incremento en la eficiencia energética en general y una reducción del consumo de energía eléctrica en particular son comúnmente reconocidos. Uno de los objetivos aprobados recientemente en el marco de la Unión Europea dentro del paquete de medidas contra el cambio climático es alcanzar un 20% de mejora de la eficiencia energética para 2020. Este trabajo se centra en la demanda de energía eléctrica, lo que en la Unión Europea supone cerca del 30% del consumo final energético por parte de las industrias. Se proponen algunas ideas cara a medir la responsabilidad de la estructura productiva de un sistema económico en relación con el consumo, y por tanto producción, de energía eléctrica. En concreto, se busca la valoración de los coeficientes técnicos de producción en relación a su poder para generar requerimientos sectoriales de energía eléctrica independientemente del vector de demanda final.

Abstract

The benefits of increased energy efficiency in general and reduced electricity consumption in particular are commonly acknowledged. One of the objectives of the recently approved EU climate change package is to realise a 20% of energy efficiency improvement by 2020. The focus of this paper is on electricity demand, which is of utmost relevance given that electricity consumption in the EU-27 represents around 30% of final energy consumption in industry. We suggest several ideas in order to measure the responsibility of the productive structure of an economic system in relation to the consumption and generation of electric energy. To be exact, we search for the assessment of technical coefficients related to the capacity of generation of electricity requirements regardless of the final demand vector.

Palabras clave: input-output, energía eléctrica, tecnología, responsabilidad, sensibilidad.

Área temática: 08. Análisis sectorial.

1. Introducción

Los beneficios de un incremento en la eficiencia energética en general y una reducción del consumo de energía eléctrica en particular son comúnmente reconocidos e incluyen aspectos como una reducción del proceso de cambio climático, un aumento de la productividad y, por tanto, de la competitividad, efectos positivos sobre el empleo, creación de oportunidades de negocio, reducción de la dependencia energética y por tanto una mejora de la seguridad energética, y reducción de la contaminación a niveles local y global.

Uno de los objetivos aprobados en el marco de la Unión Europea dentro del paquete de medidas contra el cambio climático es alcanzar un 20% de mejora de la eficiencia energética para 2020. Este objetivo requiere nuevas políticas de mejora de la eficiencia energética.

El presente trabajo forma parte de una investigación más amplia en la que se plantea un análisis de la demanda de energía eléctrica, que en la Unión Europea supone cerca del 30% del consumo final energético por parte de las industrias. A su vez, la industria abarca el 28% del total del consumo energético y el 20% del total de emisiones de gases de efecto invernadero en la misma Unión. La electricidad es un objeto de estudio muy importante dentro de la problemática energética, incluso a pesar de ser un tipo de energía secundaria (se produce a partir de la transformación de una fuente primaria), ya que está muy relacionada con el crecimiento económico.

El objetivo de este trabajo se centra en proponer una metodología, dentro del análisis input-output, capaz de identificar aquellas transacciones productivas que puedan considerarse tecnológicamente importantes en relación al papel que juegan como desencadenantes de los mayores requerimientos de energía eléctrica dentro del sistema productivo global. Promoviendo en cambio tecnológico sobre tales transacciones, se logrará de una manera efectiva mejorar la eficiencia en el consumo de electricidad en los procesos productivos.

Para ello, cada transacción intersectorial, representada por el coeficiente técnico de producción correspondiente, será ponderada por un determinado grado de importancia.

En la estimación del grado de importancia tendrán que considerarse tanto los requerimientos directos de electricidad como los indirectos, que van incluidos implícitamente en las transacciones entre dos sectores productivos, independientemente de que alguno de ellos sea el sector de producción de energía eléctrica.

2. Marco analítico: consumo eléctrico y relaciones intersectoriales

En este apartado se plantean con mayor detalle las bases analíticas de esta propuesta, por medio de la especificación de las relaciones input-output que serán tenidas en cuenta.

Así, si llamamos e_m a la producción total de energía eléctrica en unidades físicas (energéticas) por parte del sector de generación de energía eléctrica *m*, y x_m a su output o producción total en términos monetarios, podremos establecer la relación:

$$e_m = c_m \cdot x_m \tag{1}$$

donde c_m es el coeficiente de valoración energética, que expresa la cantidad de energía eléctrica producida en unidades físicas por unidad monetaria[1].

Dicha producción dependerá de la demanda que de electricidad ejercen tanto los diferentes sectores productivos (incluido el mismo sector de generación de electricidad) como la demanda final (gasto en consumo privado y público, formación bruta de capital y sector exterior neto)[2]. Si tomamos a partir de ahora estos requerimientos en unidades monetarias tendremos:

$$x_m = \sum_{j=1}^{n} x_{mj} + y_m \tag{2}$$

donde x_{mj} son las ventas que el sector de generación de energía eléctrica *m* realiza al sector *j*, e y_m son las ventas de la rama *m* a la demanda final.

Por otro lado, podemos definir los coeficientes técnicos a_{ij} como los requerimientos de bien producido por el sector *i* para producir una unidad del bien producido por el sector *j*:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \tag{3}$$

Por lo tanto, el vector columna de coeficientes técnicos del sector *j* puede considerarse un proxy de la tecnología del sector, ya que puede entenderse como el mix de inputs necesario para generar una unidad del bien o servicio producido por dicho sector *j*.

Sabemos que las necesidades totales de bien *i* por parte de la actividad *j* vendrán dadas tanto por sus compras directas de bien *i* como por las compras de bien *i* realizadas por otras ramas de actividad que, en diferentes etapas del proceso productivo global, son finalmente suministradoras de la rama de actividad *j*. Estos requerimientos

[1] En el desarrollo vamos a suponer estabilidad o constancia en el coeficiente de valoración c_m.

[2] En el caso de España, demanda y producción interna son casi equivalentes, ya que nuestro país supone prácticamente una isla en términos de energía eléctrica. Tan solo un 2% de la electricidad total consumida es importada.

totales que una rama de actividad tiene de forma directa e indirecta de los bienes y servicios producidos por el resto de ramas de actividad vienen recogidos en los coeficientes de la matriz inversa de Leontief. De esta manera, (1) puede ser reescrito como sigue:

$$e_m = c_m \left(\sum_{q=1}^{n} b_{mq} \cdot y_q \right) \quad \mathbf{(4)}$$

donde b_{mq} son los elementos de la fila *m* de la matriz inversa de Leontief $B = (I - A)^{-1}$, y recogen las adquisiciones directas e indirectas de electricidad por *m* por parte de cada una de las *q* actividades productivas del sistema económico, a la hora de producir, cada una de ellas, una unidad del bien o servicio objeto de su actividad[3]. Con *A* designamos la matriz de coeficientes técnicos que recoge todos los elementos definidos en (2).

3. Revisión del concepto de importancia de un coeficiente técnico

En 1950 Sherman y Morrison publican en *Annals of Mathematical Statistics* un trabajo donde desarrollaban la fórmula que recogía los efectos sobre los elementos de una matriz inversa de cambios en los elementos de la matriz original, sin necesidad de recalcular la inversa. Una de las aplicaciones inmediatas se dio en el marco input-output y, más concretamente, en los efectos de los cambios de los coeficientes técnicos de producción sobre los elementos de la matriz inversa de Leontief (Evans, 1954)[4]. En concreto, una variación en el coeficiente técnico a_{ik} tiene como consecuencia el siguiente cambio en los elementos de la matriz inversa de Leontief:

$$\dot{b}_{mj} = \frac{b_{mi} b_{kj} \dot{a}_{ik}}{1 - b_{ki} \dot{a}_{ik}} \quad \mathbf{(5)}$$

De esta manera, era posible cuantificar los cambios que la variación en uno o varios coeficientes originaban sobre el output de los diferentes sectores o ramas de actividad que integraban la tabla input-output de referencia, cimentándose el análisis de identificación de coeficientes importantes de una tabla.

La aplicación del concepto de "coeficiente importante" al caso energético es inmediato. En el caso concreto que nos ocupa del consumo eléctrico, y siguiendo a Tarancón et al. (2011), la valoración de un coeficiente, y de la transacción económica que conlleva, vendrá dada por la capacidad que tiene para movilizar la producción del sector de generación de energía eléctrica *m*. Por tanto, incluyendo (5) en (4) tendremos:

$$\dot{e}_m = c_m \sum_{q=1}^{n} \frac{b_{mi} b_{kq} \dot{a}_{ik}}{1 - b_{ki} \dot{a}_{ik}} y_q = c_m \frac{b_{mi} x_k \dot{a}_{ik}}{1 - b_{ki} \dot{a}_{ik}} \quad \mathbf{(6)}$$

---

[3] El modelo de Leontief puede ser deducido como sigue. Sea *x* el vector (nx1) del output del sistema económico, A la matriz (nxn) de coeficientes técnicos definidos en (2) e *y* el vector (nx1) de demanda final. Por tanto: $x = Ax + y \Rightarrow x - Ax = y \Rightarrow (I - A)x = y \Rightarrow x = (I - A)^{-1} y$, con $B = (I - A)^{-1}$ la matriz inversa de Leontief.

[4] Para una revisión de estas aplicaciones consúltese Tarancón et al. (2008).

Por último, podemos expresar lo anterior en términos de elasticidades. Obviamente, al suponer el factor de conversión de unidades de energía eléctrica monetarias a físicas c_m, la elasticidad dependerá de la variación relativa del output del sector eléctrico *m* en términos monetarios:

$$\varepsilon_{a_{ik}e_m} = \frac{\frac{\dot{e}_m}{e_m}}{\frac{\dot{a}_{ik}}{a_{ik}}} = \frac{\frac{c_m\dot{x}_m}{c_m x_m}}{\frac{\dot{a}_{ik}}{a_{ik}}} = \frac{b_{mi}a_{ik}}{1-b_{ki}\dot{a}_{ik}} \cdot \frac{x_k}{x_m} \qquad \textbf{(7)}$$

De esta manera, calculando las correspondientes elasticidades, podremos decir que un coeficiente técnico de producción es importante desde el punto de vista de su contribución al consumo / producción de electricidad si la producción del sector eléctrico *m* posee una alta elasticidad respecto a éste.

4. Importancia estructural e importancia tecnológica

Analizando la expresión (7) podemos comprobar cómo la elasticidad de la producción de la energía eléctrica ante un cambio en el coeficiente técnico a_{ik} vendrá determinada no sólo por las características tecnológicas del sistema productivo global (en concreto, de los requerimientos directos e indirectos que de electricidad tiene el sector vendedor *i* implicado en el coeficiente a_{ik}; y de los requerimientos directos e indirectos que de la producción del sector *k* tiene el sector vendedor *i* implicado en el coeficiente a_{ik}, en este caso en proporción a la magnitud del cambio experimentado por el coeficiente); sino también del volumen de output del sector *k*, en relación a la producción eléctrica total x_m. Este último factor depende en última instancia de la demanda a la que está sometido el sector *k* y, por tanto, de la demanda final. Por ello, (7) nos da una medida de "importancia estructural", en el sentido de que esta medida incluye también el efecto de la estructura del vector de demanda final.

Desde un punto de vista estricto, la **importancia estructural** en la generación de energía eléctrica de un sector *k*, entendido éste como agente económico, no es exclusiva de él, al menos directamente, ya que en cierto modo no es responsable de su propia producción x_k, factor que entra a formar parte del numerador de (7), sino de los agentes que actúan sobre la demanda final de los sectores económicos:

$$x_k = \sum_{q=1}^{n} b_{kq} \cdot y_q \qquad \textbf{(8)}$$

Esto hace que la responsabilidad en la generación de energía eléctrica del sector *k*, a través de las importancias de sus coeficientes, pueda variar no por un cambio en sus condiciones tecnológicas; sino por un cambio en la estructura del vector de demanda final.

Podría ser interesante, pues, valorar los coeficientes técnicos por su importancia estrictamente tecnológica, esto es, por su "inercia" a provocar mayores o menores requerimientos de energía eléctrica, de forma independiente al dictamen de la demanda final dada en un momento determinado. Este tipo de importancia es la que denominamos **importancia tecnológica**.

Con este objetivo, se plantea la posibilidad de valorar los coeficientes suponiendo un estado "ideal" de crecimiento sostenido de la economía. En el siguiente apartado se expone este enfoque.

5. Sensibilidad del crecimiento sostenido de la economía

En el epígrafe anterior se ha definido la importancia tecnológica de un coeficiente técnico como la capacidad que tiene éste para movilizar la producción de electricidad, independientemente de cuál sea composición o estructura del vector de demanda final. Esto se justifica porque, ante una misma tecnología (coeficientes técnicos constantes), si el vector de demanda final de la Economía variara, así lo haría también la importancia del coeficiente. Con el concepto de importancia tecnológica se busca, pues, un concepto más estable, la inercia o propensión que tiene un sistema económico a consumir energía debida a sus diferentes coeficientes técnicos.

Una opción sería utilizar la estructura de demanda final coherente con el concepto de crecimiento uniforme de la economía, es decir, la tasa de crecimiento del output que permite un incremento de éste equilibrado y sostenible a largo plazo, tal como se desarrolla en Alcántara (2011).

Para introducirlo, hemos de considerar el Teorema de Perron-Frobenius, según el cuál dada la matriz A de coeficientes técnicos definidos en (3), su mayor autovalor o autovalor dominante es positivo[5]. Denotaremos ese autovalor por $\lambda_{\max}$. Si llamamos z a su autovector derecho asociado, tendremos la relación:

$$Az = \lambda_{\max} z \tag{9}$$

Como se demuestra en Pasinetti (1975), y se cita en Lipnowski (1976), el autovalor dominante puede ser expresado como:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{1+g} \tag{10}$$

donde g es la tasa de crecimiento uniforme de la Economía.

Una pequeña variación en cualquiera de los coeficientes técnicos originará un cambio en $\lambda_{\max}$. Además este cambio no será el mismo cambie el coeficiente que cambie. El cambio ante esta variación de un coeficiente dependerá del lugar en que ese coeficiente se encuentre y el papel que juega en la estructura del sistema.

Dado que g es la tasa de expansión uniforme del sistema, nuestro problema es: ¿Qué importancia tienen cada uno de los coeficientes para el crecimiento? En principio pensemos que estamos interesados en el incremento de la producción.

Definamos el autovector izquierdo asociado al autovalor máximo como:

[5] Sobre la relevancia de un análisis de este tipo ver Dietzenbacher, E. (1988 y 1992)

$$q'A = \lambda_{\max} q' \quad \textbf{(11)}$$

Aplicando diferencias a (9):

$$\dot{A}z + A\dot{z} = \dot{\lambda}_{\max} z + \lambda_{\max} \dot{z} \quad \textbf{(12)}$$

Multiplicando ambos miembros por el autovector izquierdo:

$$q'\dot{A}z + q'A\dot{z} = q'\dot{\lambda}_{\max} z + q'\lambda_{\max} \dot{z} \quad \textbf{(13)}$$

Dado que los segundos términos de ambos miembros de (13) son iguales, quedará:

$$q'\dot{A}z = q'\dot{\lambda}_{\max} z \quad \textbf{(14)}$$

Y despejando:

$$\dot{\lambda}_{\max} = \frac{q'\dot{A}z}{q'z} \quad \textbf{(15)}$$

La expresión (15) ofrece la variación experimentada por el autovalor máximo (y por tanto, la tasa de crecimiento uniforme de la economía) ante una variación de los coeficientes técnicos. Por tanto, ofrece una medida de la importancia de cada coeficiente en términos de su capacidad para cambiar el ritmo de crecimiento uniforme de la economía.

A partir de (15), por tanto, se puede obtener una matriz de sensibilidades *S* que informe de la importancia (ponderación) de cada coeficiente de *A*:

$$S = \frac{1}{q'z} qz' \quad \textbf{(16)}$$

Un elemento cualquiera de la matriz *S*, digamos, s_{ij} muestra la cuantía de la influencia de una variación en cualquiera de los coeficientes de expresados por *S* sobre $\lambda_{\max}$ permaneciendo los demás constantes. Esto es:

$$s_{ij} = \frac{\partial \lambda_{\max}}{\partial a_{ij}} \quad \textbf{(17)}$$

No obstante, los distintos s_{ij} no están estandarizados y, por tanto, pueden influir en una valoración errónea de la importancia de los distintos coeficientes desde una perspectiva comparada. Para solucionar este problema, se puede proceder a la estandarización de *S* reconvirtiendo la misma en una matriz de elasticidades.

La elasticidad nos mediría, como es bien sabido, el cambio proporcional experimentado por $\lambda_{\max}$ frente a un cambio proporcional de un coeficiente cualquiera:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{a_{ij}}{\lambda_{\max}} \frac{\partial \lambda_{\max}}{\partial a_{ij}} \quad \textbf{(18)}$$

El cálculo de la matriz de elasticidades es ahora inmediato:

$$\Gamma = \frac{1}{\lambda_{\max}} S \circ A \quad \textbf{(19)}$$

en la que $\circ$ es el producto de Hadamard.

Hasta ahora hemos valorado los coeficientes en función de su capacidad para hacer variar la tasa de crecimiento uniforme de la economía. Ahora el problema que se plantea es el siguiente: en el caso de consumo energético (eléctrico), en que lo que se requiere es disminuir las transacciones, ¿cómo podemos valorar los coeficientes técnicos? La idea es la siguiente, basada en Proops (1988).

De lo que se trata es de convertir los autovectores anteriores en autovectores de consumo eléctrico vinculados a la matriz original *A*. Para ello se convertirá esta matriz en una de coeficientes de consumo eléctrico y que sea semejante a *A*.

Sea e un vector de impacto y operemos la siguiente transformación de semejanza:

$$E = \hat{e} A \hat{e}^{-1} \quad \textbf{(20)}$$

siendo $\hat{e}$ la matriz diagonal asociada al vector de impacto.

Por tanto E y A son matrices semejantes y en consecuencia $\lambda_{\max}(A) = \lambda_{\max}(E) = \lambda_{\max}$, es decir, sus valores propios máximos son iguales. Entonces, aunque ambas matrices estén referidas a la misma estructura, sus vectores propios vinculados al autovalor máximo, que es el mismo en ambas matrices, serán diferentes. Llamando ahora $q^{e}{}'$ y z^{e} a los autovectores asociados al autovalor máximo en el caso de la matriz *E*, tendremos:

$$S^{e} = \frac{1}{q^{e}{}' z^{e}} q^{e} z^{e}{}' \quad \textbf{(21)}$$

Esta nueva matriz de sensibilidad de coeficientes S^{e} cuantifica el grado de importancia de cada coeficiente de la estructura productiva con respecto al nivel de impacto, en nuestro caso concreto, el consumo de energía eléctrica vinculada a la producción del sistema económico.

Y de la misma forma obtendríamos la matriz de elasticidades:

$$\Gamma^{e} = \frac{1}{\lambda_{\max}} S^{e} \circ A \quad \textbf{(22)}$$

6. Conclusiones

En este trabajo se quiere obtener una valoración o importancia de los coeficientes técnicos de una matriz input-output en relación al consumo de energía eléctrica ligada a la producción de bienes y servicios del sistema económico correspondiente.

Se parte de la fórmula de Sherman y Morrison para obtener una expresión que valora cada coeficiente según su capacidad para cambiar la producción y/o consumo de electricidad. La importancia así calculada se la denomina importancia estructural del coeficiente, ya que en su cálculo no sólo interviene la estructura productiva representada en la matriz de coeficientes; sino la estructura de la demanda final.

Como alternativa, queremos obtener una medida de importancia tecnológica, independiente de la estructura de demanda final en un momento dado. Para ello se recurre al concepto de autovalor máximo o dominante de la matriz de coeficientes como medida de la tasa de crecimiento uniforme de la economía. Así, se obtendrá una valoración de coeficientes bajo el supuesto de que el sistema económico sigue una senda estable de crecimiento. La importancia de cada coeficiente respecto al consumo eléctrico en este marco de crecimiento estable (independiente de la estructura de la demanda final existente en un momento dado) será denominada importancia tecnológica. Para el cálculo de esta importancia tecnológica se emplean las propiedades de las matrices semejantes.

Referencias

Alcántara, V. (2011) Crecimiento económico y estructura productiva en un modelo Input-Output: un análisis alternativo de sensibilidad de los coeficientes, **Departament d'Economía Aplicada de la U.A.B. W.P. nº 11.08**.

Dietzenbacher, E. (1992) "The measurement of interindustry linkages", **Economic Modelling**, October.

Dietzenbacher, E. (1988) Perturbations of Matrices: A Theorem on the Perron Vector and its Applications to Input-Output Models, **Journal of Economics,** 4: 389-412

Evans, W.D. (1954) The effect of structural matrix errors on interindustry relation estimates, **Econometrica**, 22: 461-480.

Pasinetti, L. (1975) **Lezioni di teoria delle produzione**. Società editrice il Mulino, Bologna

Proops J. L. R. (1988) Energy intensities, input-output analysis and economic development. En: Ciaschini M., editor. **Input-Output Analysis: Current Developments**, Londres: Chapman:and Hall: 201-215.

Sherman, J.; Morrison, W.J. (1950) Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix, **Annals of Mathematical Statistics**, 21: 124-127.

Tarancón Morán, M. A.; Del Río González, P.; Callejas Albiñana, F. (2011) Determining the responsibility of manufacturing sectors regarding electricity consumption. The Spanish case. **Energy**, 36 (1): 46-52.

Tarancón Morán, M. A., Callejas Albiñana, F., Dietzenbacher, E.; Lahr, M. L. (2008) A Revision of the Tolerable Limits Approach: Searching for the Important Coefficients. **Economic Systems Research**, 20 (1).

Apéndice: ejemplo numérico

Sea la matriz de coeficientes técnicos A:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}2000 & 0{,}5000 & 0{,}5000 & 0{,}1000 \\ 0{,}1000 & 0{,}2000 & 0{,}2000 & 0{,}3000 \\ 0{,}1000 & 0{,}1000 & 0{,}1000 & 0{,}2000 \\ 0{,}1000 & 0{,}1000 & 0{,}1000 & 0{,}3000 \end{bmatrix}$$

Tenemos que $\lambda_{\max} = 0{,}735736$. Por otro lado:

$$q' = \begin{bmatrix} 0{,}476424 & 0{,}776186 & 0{,}776186 & 1{,}000000 \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} 1{,}000000 \\ 0{,}587810 \\ 0{,}392754 \\ 0{,}454534 \end{bmatrix}$$

Se puede comprar el cumplimiento de las expresiones (9) y (11).

Po otro lado, vamos a suponer una nueva matriz A^*, que es la matriz A con el primer coeficiente ligeramente cambiado (podría seleccionarse otro coeficiente cualquiera, o incluso varios coeficientes simultáneamente, sin pérdida de validez):

$$A^* = \begin{bmatrix} 0{,}2002 & 0{,}5000 & 0{,}5000 & 0{,}1000 \\ 0{,}1000 & 0{,}2000 & 0{,}2000 & 0{,}3000 \\ 0{,}1000 & 0{,}1000 & 0{,}1000 & 0{,}2000 \\ 0{,}1000 & 0{,}1000 & 0{,}1000 & 0{,}3000 \end{bmatrix}$$

Así, tendremos la matriz de cambios de A:

$$\dot{A} = \begin{bmatrix} 0{,}0002 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

Al cambiar *A* por *A**, se obtiene un nuevo autovalor máximo y nuevos autovectores asociados, y en consecuencia sus respectivas variaciones. Nos interesan las variaciones del autovalor dominante y del autovector derecho asociado, que son:

$$\dot{\lambda}_{\max} = 0{,}000056$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0{,}000000 \\ -0{,}000165 \\ -0{,}000098 \\ -0{,}000119 \end{bmatrix}$$

Con ello podemos verificar el cumplimiento de (12):

$$\dot{A}z + A\dot{z} = \dot{\lambda}_{\max} z + \lambda_{\max}\dot{z} = \begin{bmatrix} 0{,}000056 \\ -0{,}000088 \\ -0{,}000050 \\ -0{,}000062 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por el autovector izquierdo y simplificando según (13), se verificaría:

$$q'\dot{A}z = q'\dot{\lambda}_{\max} z = 0{,}000095$$

Y con ello obtendríamos el resultado de (14):

$\dot{\lambda}_{\max} = \dfrac{q'\dot{A}z}{q'z} = 0{,}000056$; que coincide con la variación del autovalor máximo calculada, obviamente.

Obteniendo ahora la matriz de sensibilidad de coeficientes (16):

$$S = \frac{1}{1{,}692058}\begin{bmatrix} 0{,}476424 & 0{,}280047 & 0{,}187117 & 0{,}216551 \\ 0{,}776186 & 0{,}456250 & 0{,}304850 & 0{,}352803 \\ 0{,}776186 & 0{,}456250 & 0{,}304850 & 0{,}352803 \\ 1{,}000000 & 0{,}587810 & 0{,}392754 & 0{,}454534 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}281565 & 0{,}165507 & 0{,}110586 & 0{,}127981 \\ 0{,}458723 & 0{,}269642 & 0{,}180165 & 0{,}208505 \\ 0{,}458723 & 0{,}269642 & 0{,}180165 & 0{,}208505 \\ 0{,}590996 & 0{,}347394 & 0{,}232116 & 0{,}268628 \end{bmatrix}$$

A partir de esta matriz, puede calcularse la matriz de elasticidades (19):

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0{,}076540 & 0{,}112477 & 0{,}075153 & 0{,}017395 \\ 0{,}062349 & 0{,}073299 & 0{,}048976 & 0{,}085019 \\ 0{,}062349 & 0{,}036649 & 0{,}024488 & 0{,}056679 \\ 0{,}080327 & 0{,}047217 & 0{,}031549 & 0{,}109534 \end{bmatrix}$$

Según esta matriz, el coeficiente cuyo cambio tiene mayor consecuencias en el autovalor máximo es a_{12}; y el que menos el a_{14}. Efectivamente, si cambiamos a_{12} en la misma proporción que hicimos con el coeficiente a_{11} en el ejemplo (un 0.1%), el autovalor cambia con $\dot{\lambda}_{\max} = 0{,}011247$; en cambio, si añadimos un 0,1% a a_{14}, se obtiene $\dot{\lambda}_{\max} = 0{,}001739$.

Vamos a suponer ahora un vector de impacto convertido en la matriz diagonal:

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 0{,}3000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5000 \end{bmatrix}$$

Obteniendo la matriz semejante E de (20):

$$E = \hat{e}A\hat{e}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}200000 & 1{,}500000 & 0{,}187500 & 0{,}060000 \\ 0{,}033333 & 0{,}200000 & 0{,}025000 & 0{,}060000 \\ 0{,}266667 & 0{,}800000 & 0{,}100000 & 0{,}320000 \\ 0{,}166667 & 0{,}500000 & 0{,}062500 & 0{,}300000 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene de nuevo como autovalor máximo $\lambda_{\max} = 0{,}735736$; pero ahora tiene como autovectores asociados:

$$q^{e\prime} = \begin{bmatrix} 0{,}204600 & 1{,}000000 & 0{,}125000 & 0{,}257670 \end{bmatrix}$$

$$z^{e} = \begin{bmatrix} 0{,}954796 \\ 0{,}187080 \\ 1{,}000000 \\ 0{,}723311 \end{bmatrix}$$

Ahora se puede calcular la correspondiente matriz de sensibilidades (21):

$$S^e = \frac{1}{0{,}693807}\begin{bmatrix} 0{,}195352 & 0{,}038277 & 0{,}204600 & 0{,}147990 \\ 0{,}954796 & 0{,}187080 & 1{,}000000 & 0{,}723311 \\ 0{,}119349 & 0{,}023385 & 0{,}125000 & 0{,}090414 \\ 0{,}246022 & 0{,}048205 & 0{,}257670 & 0{,}186376 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}281565 & 0{,}055169 & 0{,}294895 & 0{,}213301 \\ 1{,}376170 & 0{,}269642 & 1{,}441323 & 1{,}042525 \\ 0{,}172021 & 0{,}033705 & 0{,}180165 & 0{,}130316 \\ 0{,}354598 & 0{,}069479 & 0{,}371386 & 0{,}268628 \end{bmatrix}$$

Lo que a su vez permite calcular la matriz de elasticidades (22):

$$\Gamma^e = \begin{bmatrix} 0{,}076540 & 0{,}037492 & 0{,}200408 & 0{,}028992 \\ 0{,}187047 & 0{,}073299 & 0{,}391805 & 0{,}425095 \\ 0{,}023381 & 0{,}004581 & 0{,}024488 & 0{,}035425 \\ 0{,}048196 & 0{,}009443 & 0{,}050478 & 0{,}109534 \end{bmatrix}$$

Según esta nueva matriz es ahora el coeficiente a_{24} el que tiene una mayor importancia, y el a_{32} el que menos.