Sobre la formación de precios en un sistema tipo Leontief homogeneizado

Quiñoá López, Xosé Luis [a*]***; Estévez Núñez, Juan Carlos*** [b]

[a*,b] *Facultade de Ciencias Económicas e Empresariais*
Universidade de Santiago de Compostela
Avda. do Burgo, s/n. Campus Norte
15782 Santiago de Compostela

E-mail [a*]*: joseluis.quinoa@usc.es*

*Autor de contacto

Resumen

Un sistema tipo Leontief puede ser transformado en uno estructuralmente equivalente cuya matriz tecnológica es diagonal dominante por columnas (sistema homogeneizado).

En este trabajo se hace una interpretación de la formación de los precios (en sentido Sraffa) utilizando el teorema del punto fijo. Asimismo se da una interpretación de la variación de los precios relativos entre sistemas homogeneizados o no, al modificar el tipo de beneficio.

Palabras clave: Homogeneización, Sistemas Leontief, precios, tipo de beneficio, punto fijo.

Área temática: 2.- Aspectos metodológicos en el análisis input-output.

Abstract

A Leontief type system can be turned into a structurally equivalent one whose technological matrix is column dominant diagonal (homogenized system). An interpretation of price's formation is made in this work (in sense Sraffa) using the theorem of the fixed point. In like manner an interpretation of the variation of the relative prices between homogenized systems or not is given when modifying the type of benefit.

Keywords: Homogenization, Leontief's system, price, type of benefit, fixed point.

Topic: 2.- Methodological aspects in the input-output analysis.

1 Introducción.

Un sistema Leontief irreducible puede ser transformado en uno estructuralmente equivalente tal que su matriz tecnológica A=(a_{ij}) verifica :

$$\forall j, \quad 1 \le j \le n \quad \sum_i a_{ij} = \bar{a} \quad (\bar{a} \text{ autovalor máximo de A})$$

Para tal sistema, en el planteamiento del sistema de precios de Sraffa (1975) se cumple : $p\left[I-(1+\Pi)\ A\right]=l\ w$ donde Π es el tipo de beneficio uniforme en todas las industrias y w es el salario unitario también uniforme[1].

La matriz $\left[I-(1+\Pi)\ A\right]$ del sistema es diagonal dominante por columnas para todo Π admisible $\left(0 \le \Pi < \tilde{\Pi} = \frac{1}{\bar{a}} - 1\right)$, hecho este que permite la determinación de los precios $p = l\ w\left[I-(1+\Pi)\ A\right]^{-1}$ mediante aproximaciones sucesivas utilizando el teorema del punto fijo, y a la par dar una interpretación económica de la formación de precios distinta de "la reducción a cantidades de trabajo fechadas"[2] de Sraffa (1975).

Es conocido que en un sistema Leontief cualquiera con formulación de precios de Sraffa, una modificación del tipo de beneficio lleva aparejada una variación de los precios relativos de las distintas mercancías y de hecho en algunos casos los precios se intersecan para un determinado tipo de beneficio. Demostramos en la segunda parte del trabajo que ello depende del vector $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$ de coeficientes de trabajo directo.

Ahora bien, si el sistema ha sido previamente "homogeneizado", se demuestra que cuando Π tiende al tipo máximo de beneficio $\tilde{\Pi}$, los precios relativos tienden a ser todos iguales. Por ello, en este caso, aún cuando los precios pueden también intersecarse para un determinado tipo de beneficio, a medida que aumenta Π se hace cada vez menor el "peso" que $l\ w$ tiene en la determinación de los precios, por lo que los precios relativos siguen tendiendo a converger al mismo valor.

Para visualizar lo anterior hemos preferido utilizar el mismo ejemplo con el que Sraffa (1975) introdujo su famoso "sistema patrón"[3].

El objetivo de Sraffa consistía en buscar una relación lineal entre el tipo de beneficio Π y la parte W del producto neto tipo que se llevaban los trabajadores, obteniendo así que $\Pi = \tilde{\Pi}(1-W)$. Sin embargo, el "sistema patrón" no resuelve el problema de la evolución de los precios relativos al modificar Π, como hemos querido poner de manifiesto. Así en la gráfica 1 se ve la evolución de los precios (absolutos y relativos) en el sistema original con los datos de Sraffa; en la gráfica 2 se muestra la

[1] Capítulo II
[2] Capítulo VI
[3] Capítulo IV

evolución en el sistema transformado en “sistema patrón”; y en la gráfica 3 la evolución en el sistema original “homogeneizado”. En las gráficas 4, 5 y 6 se aprecia cómo modificando el vector λ de los coeficientes de trabajo directo, los precios se intersecan.

2 Homogeneización de las unidades

Consideremos el sistema de Leontief con la siguiente notación :

$$\begin{pmatrix} q^*_{11}+\ldots+q^*_{1j}+\ldots+q^*_{1n} \\ \vdots \\ q^*_{i1}+\ldots+q^*_{ij}+\ldots+q^*_{in} \\ \vdots \\ q^*_{n1}+\ldots+q^*_{nj}+\ldots+q^*_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta^*_1 \\ \vdots \\ \beta^*_i \\ \vdots \\ \beta^*_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^*_1 \\ \vdots \\ Q^*_i \\ \vdots \\ Q^*_n \end{pmatrix} \Rightarrow \left(q^*_{ij}\right)\cdot\vec{1}+\beta^* = Q^* \qquad (1)$$

Como es bien sabido, la matriz tecnológica asociada a este sistema sería ...

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{q^*_{11}}{Q^*_1} & \cdots & \frac{q^*_{1j}}{Q^*_j} & \cdots & \frac{q^*_{1n}}{Q^*_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{q^*_{i1}}{Q^*_1} & \cdots & \frac{q^*_{ij}}{Q^*_j} & \cdots & \frac{q^*_{in}}{Q^*_n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{q^*_{n1}}{Q^*_1} & \cdots & \frac{q^*_{nj}}{Q^*_j} & \cdots & \frac{q^*_{nn}}{Q^*_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^*_{11} & \cdots & a^*_{1j} & \cdots & a^*_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a^*_{i1} & \cdots & a^*_{ij} & \cdots & a^*_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^*_{n1} & \cdots & a^*_{nj} & \cdots & a^*_{nn} \end{pmatrix}$$

... y si el sistema económico presenta algún tipo de excedente β^*, entonces sabemos que el autovalor máximo $\bar{a}^*$ de la matriz tecnológica A^* es estrictamente menor que 1 ($\bar{a}^* < 1$), y si A^* es indescomponible (irreducible), al mismo le corresponde un autovector por la izquierda r que cumple $rA^* = \bar{a}^* r$ siendo $r = (r_1, r_2, ..., r_n) > 0$.

Pero si se expresa el mismo sistema cambiando las unidades en las que se mide la producción de cada industria, utilizando un multiplicador k_i para cada una, quedaría:

$$\begin{pmatrix} k_1q^*_{11}+\ldots+k_1q^*_{1n} \\ \vdots \\ k_iq^*_{i1}+\ldots+k_iq^*_{in} \\ \vdots \\ k_nq^*_{n1}+\ldots+k_nq^*_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1\beta^*_1 \\ \vdots \\ k_i\beta^*_i \\ \vdots \\ k_n\beta^*_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1Q^*_1 \\ \vdots \\ k_iQ^*_i \\ \vdots \\ k_nQ^*_n \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} a^*_{11} & \ldots\ldots & \frac{k_1}{k_j}a^*_{1j} & \cdots & \frac{k_1}{k_n}a^*_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{k_i}{k_1}a^*_{i1} & \cdots & a^*_{ij} & \ldots\ldots & \frac{k_i}{k_n}a^*_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{k_n}{k_1}a^*_{n1} & \cdots & \frac{k_n}{k_j}a^*_{nj} & \cdots & a^*_{nn} \end{pmatrix}$$

En el particular caso en que el cambio de unidades se realice utilizando las componentes del vector r correspondiente al autovector máximo de A, al sistema resultante se le denominará en adelante “sistema homogeneizado” y resultará :

$$\forall j,\ 1 \le j \le n:\ r_1\, a^*_{1j} + \ldots + r_i\, a^*_{ij} + \ldots + r_n\, a^*_{nj} = \bar{a}^*\, r_j\,.$$

Es decir ... $\forall j,\quad 1 \le j \le n,\quad \frac{r_1}{r_j} a^*_{1j} + \ldots + \frac{r_i}{r_j} a^*_{ij} + \ldots + \frac{r_n}{r_j} a^*_{nj} = \bar{a}^*$ **(2)**

... de donde la nueva matriz tecnológica A correspondiente a dicho “sistema homogeneizado” cumplirá la propiedad de que $\forall j\,,\ 1 \le j \le n,\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \bar{a}\,.$ Esto último supone que los vectores columna de A suman todos lo mismo, a saber $\bar{a}$ (autovalor máximo de A - y también de A^*-).

Si se considerase una tasa de beneficio Π admisible, $0 \le \Pi < \frac{1}{\bar{a}} - 1$, puesto que r es autovector izquierdo de A , se cumplirá $rA = \bar{a}\, r \Rightarrow r(1+\Pi)A = (1+\Pi)\bar{a}\, r\,.$ Por ello $(1+\Pi)\bar{a}$ será autovalor de (1 + Π)A, y admitirá r como autovector izquierdo.

En Quiñoá (2011) se demuestra que la matriz [I – (1+Π)A] es a su vez diagonal dominante por columnas[4] (siendo A la matriz tecnológica del sistema ya “homogeneizado”).

3 Interpretación de los precios utilizando el teorema del punto fijo

Situados entonces en el contexto de un sistema ya “homogeneizado” y teniendo en cuenta esta última propiedad de la matriz [I – (1+Π)A] , sea **D** la matriz diagonal

$$D = (d_{ij}),\qquad d_{ii} = 1 - (1+\Pi)\, a_{ii},\qquad d_{ij} = 0 \quad \text{si } i \ne j,$$

$$D = \begin{pmatrix} 1-(1+\Pi)a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-(1+\Pi)a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-(1+\Pi)a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

entonces se cumplirá :

[4] Ver Quiñoá (2011), páginas 13 y 14 en http://www.ecap.uab.es/RePEc/doc/Quino_01-2011.pdf

$$\left[I-(1+\Pi)\ A\right]\ D^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \dfrac{-a_{1j}(1+\Pi)}{1-(1+\Pi)a_{jj}} & \cdots & \dfrac{-a_{1n}(1+\Pi)}{1-(1+\Pi)a_{nn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{-a_{i1}(1+\Pi)}{1-(1+\Pi)a_{11}} & \cdots & 1 & \cdots & \dfrac{-a_{in}(1+\Pi)}{1-(1+\Pi)a_{nn}} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}(1+\Pi)}{1-(1+\Pi)a_{11}} & \cdots & \dfrac{-a_{nj}(1+\Pi)}{1-(1+\Pi)a_{jj}} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

de donde $\tilde{A}=I-\left[I-(1+\Pi)\ A\right]\ D^{-1}$ es una matriz tal que los términos diagonales son nulos y la suma de los elementos de cada columna j, $1\leq j\leq n$ es $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left[\dfrac{(1+\Pi)\ a_{ij}}{1-(1+\Pi)\ a_{jj}}\right]<1$, porque $1-(1+\Pi)\ a_{jj}>\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(1+\Pi)a_{ij}$ y $\tilde{a}_{jj}=0$. Tenemos así que $\|\tilde{A}\|<1$.

Entonces, la aplicación $\phi\colon R^n\to R^n$ definida por [5]:

$$\phi\,(p)=l\ D^{-1}+p\left[I-\left(I-(1+\Pi)\ A\right)\ D^{-1}\right] \qquad \text{(con } w=1\text{)} \qquad (5)$$

es una contracción en R^n y admite un punto fijo único $\bar{p}$ ...

$$\phi\,(\bar{p})=l\ D^{-1}+\bar{p}-\bar{p}\left[I-(1+\Pi)\ A\right]D^{-1}\ =\bar{p}$$

$$\bar{p}\left[I-(1+\Pi)\ A\right]\ D^{-1}\ =l\ D^{-1} \qquad (6)$$

... multiplicando por **D** a la derecha ... $\bar{p}\left[I-(1+\Pi)\ A\right]=l$ **(7)**

... $\bar{p}$ es la solución del sistema $p\left[I-(1+\Pi)\ A\right]\ =l$ (sistema de precios de Sraffa).

Además, $\forall\ p^{(0)}\in R^n$, $p^{(0)}\geq 0$, la sucesión $p^{(0)}$, $p^{(1)}=\phi(p^{(0)})$, ... , $p^{(k)}=\phi(p^{(k-1)})$, ... construida a partir de $p^{(0)}$, converge a $\bar{p}$, en donde $p^{(k)}$ denota $\left(p_1^{(k)},\dots,p_n^{(k)}\right)$, $k\geq 0$.

En lo que sigue, con el objetivo de aligerar la exposición haciéndola más comprensible y sin pérdida alguna de generalidad, consideraremos un sistema formado sólo por tres industrias e investigaremos cómo se forma, por ejemplo, el precio $\bar{p}_1$ de la mercancía 1.

---

[5] Ver Quiñoá (2011), Corolario del teorema 1 y el teorema 2 del Apéndice matemático (páginas 54 y siguientes) en http://www.ecap.uab.es/RePEc/doc/Quino_01-2011.pdf.

Tenemos:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(1+\Pi)\ a_{12}}{1-(1+\Pi)\ a_{22}} & \dfrac{(1+\Pi)\ a_{13}}{1-(1+\Pi)\ a_{33}} \\ \dfrac{(1+\Pi)\ a_{21}}{1-(1+\Pi)\ a_{11}} & 0 & \dfrac{(1+\Pi)\ a_{23}}{1-(1+\Pi)\ a_{33}} \\ \dfrac{(1+\Pi)\ a_{31}}{1-(1+\Pi)\ a_{11}} & \dfrac{(1+\Pi)\ a_{32}}{1-(1+\Pi)\ a_{22}} & 0 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Si partimos de $p^{(0)} = 0$ y suponiendo que $w = 1$,

$$p^{(1)} = \phi\left(p^{(0)}\right) = \phi(0) = l\ D^{-1} = \left(\frac{l_1}{1-(1+\Pi)\ a_{11}}, \frac{l_2}{1-(1+\Pi)\ a_{22}}, \frac{l_3}{1-(1+\Pi)\ a_{33}}\right)$$

y diremos que $p_i^{(1)} = \dfrac{l_i}{1-(1+\Pi)\ a_{ii}}$ es el precio elemental de primer orden de la mercancía i y, como se ve, este depende no sólo de los λ_i, sino también de a_{ii} y de Π.

Siguiendo el procedimiento iterativo tenemos:

$$p^{(2)} = \phi\left(p^{(1)}\right) = l\ D^{-1} + p^{(1)}\tilde{A} \qquad (9)$$

y entonces

$$p_1^{(2)} = \frac{l_1}{1-(1+\Pi)\ a_{11}} + \frac{l_2}{1-(1+\Pi)\ a_{22}} \cdot \frac{(1+\Pi)\ a_{21}}{1-(1+\Pi)\ a_{11}} + \frac{l_3}{1-(1+\Pi)\ a_{33}} \cdot \frac{(1+\Pi)\ a_{31}}{1-(1+\Pi)\ a_{11}} =$$

$$= \frac{1}{1-(1+\Pi)\ a_{11}}\left[l_1 + \frac{(1+\Pi)\ a_{21}}{1-(1+\Pi)\ a_{22}} \cdot l_2 + \frac{(1+\Pi)\ a_{31}}{1-(1+\Pi)\ a_{33}} \cdot l_3\right]$$

que podemos interpretar como la suma del precio elemental de la mercancía 1 más la contribución "directa" de los precios elementales de las mercancías 2 y 3 al precio de segundo orden de 1. Es decir, el vector de los precios de segundo orden se obtiene mediante actualización de los precios de primer orden con la matriz $\tilde{A}$, que podemos denominar "matriz de actualización".

Por construcción de la sucesión $p^{(0)}$, $p^{(1)}$, ... , $p^{(k)}$, ... tenemos:

$$p^{(k)} = l\ D^{-1} + p^{(k-1)}\tilde{A}$$
$$p^{(k+1)} = l\ D^{-1} + p^{(k)}\tilde{A}$$

de donde

$$p^{(k+1)} - p^{(k)} = \left(p^{(k)} - p^{(k-1)}\right)\tilde{A} \qquad (10)$$

En efecto, obtuvimos $p^{(k)}$ actualizando $p^{(k-1)}$, y para obtener $p^{(k+1)}$ es necesario actualizar también $p^{(k)} - p^{(k-1)}$.

<u>Observación</u>. En (3) pudimos haber tomado D=I y así $I - \left[I - (1+\Pi)A\right] = (1+\Pi)A$ y dado que A es homogeneizada $\left\|(1+\Pi)A\right\| = (1+\Pi)\bar{a} < 1$ porque $\Pi < \frac{1}{\bar{a}} - 1$ y entonces la aplicación $\phi : R^n \longrightarrow R^n$ $\phi(p) = l + p(1+\Pi)A$ es también una contracción en R^n que admite un punto fijo único $\bar{p}$ al que converge la sucesión

$p^{(0)} = 0$

$p^{(1)} = \phi(0) = l$

$p^{(2)} = \phi\left(p^{(1)}\right) = l + l\,(1+\Pi)A$
……
$p^{(k+1)} = \phi\left(p^{(k)}\right) = l\left[I + (1+\Pi)A + \ldots\ldots + (1+\Pi)^k A^k\right]$
……

y tenemos $\phi(\bar{p}) = \bar{p}$ $\quad l + \bar{p}(1+\Pi)A = \bar{p}$ o aún $\bar{p}\left[I - (1+\Pi)A\right] = l$ y reencontramos la "reducción a cantidades de trabajo fechadas".[6]

4 Similitudes y diferencias entre las dos interpretaciones

Consideremos una industria que produce mercancías utilizando trabajo y mercancías de su propia producción (podríamos imaginarnos "cesta de mercancías") y completamente aislada del resto del mundo.

Denotemos (q_{11}) la matriz de transacciones, β_1 el excedente, Q_1 la producción total, $A = (a_{11})$ la matriz tecnológica, L_1 la cantidad de trabajo empleado en el periodo, $l_1 = \frac{L_1}{Q_1}$ la cantidad de trabajo por unidad producida como de costumbre, Π el tipo de beneficio y w el salario unitario.

La ecuación que determina el sistema de precios (un único precio en este caso) si $\Pi = 0$ es $p(1 - a_{11}) = l_1 w$ o bien $p = \frac{l_1 w}{(1 - a_{11})}$. Tomando el salario unitario w = 1

[6] Ver Sraffa (1975), capítulo VI y Pasinetti (1983), capítulo V, apartado 7.

entonces $p(1-a_{11}) = l_1$, lo que nos permite comprender en el caso general las expresiones $\frac{l_i}{1-(1+\Pi)a_{ii}}$ (precios elementales de primer orden) que aparecen en el texto, etc. Y la interpretación económica aparece inmediata; la primera aproximación determina el precio final sin necesidad de recurrir a "reducción a cantidades de trabajo fechadas". Sí es cierto que $p = l\left[1+(a_{11})+(a_{11})^2+\ldots\ldots\right] = \frac{l}{1-a_{11}}$ (serie geométrica de primer término 1 y razón $a_{11} = \bar{a} < 1$).

Igualmente para una tasa de beneficio Π tendríamos en la interpretación Sraffa-Pasinetti:

$$p = \left[I+(1+\Pi)A+(1+\Pi)^2 A^2+\ldots\right] = l\left[1+(1+\Pi)a_{11}+(1+\Pi)^2(a_{11})^2+\ldots\right] = l\left[\frac{1}{1-(1+\Pi)a_{11}}\right] \quad (11)$$

por ser una serie geométrica de razón $(1+\Pi)a_{11} < 1$.

Es decir, obtenemos el mismo resultado pero por caminos distintos lo que nos permite una interpretación económica distinta.

En el caso general de n industrias, disponemos de una herramienta fundamental que consiste en que hemos previamente transformado el sistema original en uno estructuralmente equivalente cuya matriz tecnológica es diagonal dominante por columnas lo que permite aplicar directamente el teorema del punto fijo.

En el caso particular en que $a_{ii} = 0$ para toda industria *i*, $\frac{l_1}{1-(1+\Pi)a_{ii}} = l_1$ y entonces la matriz D^{-1} no es otra que la propia matriz identidad I y tenemos : $\left\| I - \left[I-(1+\Pi)A\right]I \right\| = \left\|(1+\Pi)A\right\| = (1+\Pi)\bar{a} < 1$ (la matriz A es homogeneizada)

La aplicación $\phi : R^n \longrightarrow R^n \quad \phi(p) = l + p(1+\Pi)A$, es una contracción en R^n y la sucesión iterativa sería ahora $\left\{p^{(0)},\ p^{(1)}=\phi(0),\ p^{(2)}=\phi\left(p^{(1)}\right),\ \ldots,\ p^{(k+1)}=\phi\left(p^{(k)}\right),\ldots\right\}$ es decir $\left\{0\ ,\ l\ ,\ l + l(1+\Pi)A\ ,\ \ldots\ l\left[I+(1+\Pi)A+\ldots\ldots+(1+\Pi)^k A^k\right]\ \ldots\right\}$ que converge al punto fijo $\bar{p}$ y tendremos $\phi(\bar{p}) = \bar{p}$, $l + \bar{p}(1+\Pi)A = \bar{p}$ o aún $\bar{p}\left[I-(1+\Pi)A\right] = l$.

Y la interpretación que proponemos coincide, en este caso, con la de Sraffa (1975) de "reducción a cantidades de trabajo fechadas".

5 Consideraciones en torno a la evolución de los precios en un sistema homogeneizado

En un "sistema homogeneizado", de $p\left[I-(1+\Pi)\ A\right]=l w$ se deduce que si λw tiende a 0, lo que equivale a que Π tienda a $\dfrac{1}{\bar{a}}-1$, el vector de precios 'p' tiende a ser autovector izquierdo de A y, dado que $\vec{1}^t=(1,\ldots,1)$ es autovector izquierdo de A, deducimos que los precios tienden a ser todos iguales.[7]

Lo anterior no significa en absoluto que en un "sistema homogeneizado" los precios no puedan cruzarse para un cierto valor de Π, pero ello es más difícil y si eso ocurre la variación de los precios relativos es muchísimo más suave.

Ilustremos lo anterior con un ejemplo numérico sencillo relativo a dos industrias.

Ejemplo numérico 1

Con el sistema representado por ...

$$\left(q^*_{ij}\right)=\begin{pmatrix}30\ ,\ 20\\50\ ,\ 20\end{pmatrix}\quad \beta^*=\begin{pmatrix}50\\30\end{pmatrix}\quad Q^*=\begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix}\quad \text{con matriz tecnológica}\quad A^*=\begin{pmatrix}0.3\ ,\ 0.2\\0.5\ ,\ 0.2\end{pmatrix}$$

$$L^*=(20\ ,80)\qquad \Rightarrow \qquad l^*=\left(l^*_1,l^*_2\right)=(0.2\ ,\ 0.8)$$

El autovalor máximo de la matriz A^* es $\bar{a}^*\approx 0.570156$; y la solución de $(v_1, v_2)\ (I–A^*) = (0.2\ , 0.8)$ sería $v_1\approx 1.217391$, $v_2\approx 1.304348$.

El tipo máximo de beneficio sería $\tilde{\Pi}=\dfrac{1}{\bar{a}^*}-1\approx 0.753905$. Se comprueba que para $1+\Pi\approx 1.071428$ la solución de $p^*\left[I-(1+\Pi)A^*\right]=(0.2\ ,\ 0.8)$ es $p^*_1=p^*_2=1.4$

Los precios se intersecan, pues, para un tipo de beneficio relativamente bajo del 7.14%. Asimismo, para $1+\Pi = 1.5$ obtenemos: $p^*_1\approx 4.625$ y $p^*_2\approx 3.125$ y para $1+\Pi = 1.75$ tenemos: $p^*_1\approx 332$ y $p^*_2\approx 180$.

Homogeneicemos el problema : resolviendo $(\alpha_1,\ \alpha_2)\ \left(\bar{a}\ I-A^*\right)=(\ 0\ ,\ 0\ )$ obtenemos $\alpha_1\approx 1.850781$ y $\alpha_2=1$, tomando la mercancía 2 como numerario.

[7] Ver Quiñoá (2011), páginas 19 y 20 en http://www.ecap.uab.es/RePEc/doc/Quino_01-2011.pdf

El "sistema homogeneizado" es :

$$\left(q_{ij}\right)=\begin{pmatrix}55.523432 , & 37.015621\\ 50 , & 20\end{pmatrix} \quad \beta=\begin{pmatrix}92.539053\\ 30\end{pmatrix} \quad Q=\begin{pmatrix}185.078106\\ 100\end{pmatrix}$$

La nueva matriz tecnológica resulta $A=\begin{pmatrix}0.3 , & 0.370156\\ 0.270156 , & 0.2\end{pmatrix}$

Y el nuevo vector de los coeficientes de trabajo directo: $\lambda = (0.108062 , 0.8)$

La solución de $(v_1, v_2)(I - A) = \lambda$ es $v_1 \approx 0.657772$, $v_2 \approx 1.304348$

Antes de calcular los precios para $1+\Pi = 1.5$ y $1+\Pi = 1.75$, observamos que en un "sistema homogeneizado" de dos industrias, los precios no pueden cruzarse nunca, salvo si $\lambda_1 = \lambda_2$, en cuyo caso son iguales cualquiera que sea el tipo de beneficio admisible Π. En efecto, si para un Π tuviéramos $p_1 = p_2 = p$,

$$\begin{cases}\left[1-(1+\Pi)\ a_{11}\right]\ p-(1+\Pi)\ a_{21}\ p=l_1\\ -(1+\Pi)\ a_{12}\ p+\left[1-(1+\Pi)\ a_{22}\right]\ p=l_2\end{cases}$$

o aún

$$\begin{cases}p-(1+\Pi)\ \bar{a}\ p=l_1 & \left(a_{11}+a_{21}=\bar{a}\right)\\ p-(1+\Pi)\ \bar{a}\ p=l_2 & \left(a_{12}+a_{22}=\bar{a}\right)\end{cases}$$

de donde necesariamente debe ser $\lambda_1 = \lambda_2$.

Si $1+\Pi = 1.5$ entonces $\left[I-(1+\Pi)\ A\right]=\begin{pmatrix}0.55 & -0.555234\\ -0.405234 & 0.7\end{pmatrix}$

y la solución de $p\left[I-(1+\Pi)\ A\right]=(0.10804 , 0.8)$ es: $p_1 \approx 2.4989$, $p_2 \approx 3.125$
y para $1+\Pi = 1.75$ tenemos: $p_1 \approx 179.3837$, $p_2 \approx 180$

Se observa que: $$\frac{p_1}{p_1+p_2} \approx \frac{p_2}{p_1+p_2} \approx 0.5$$

6 Sobre cuando se intersecan los precios

Consideremos el sistema $p\left[I-(1+\Pi)\ A\right]=l$ y supongamos que existe una tasa de beneficio Π, $\left(0 \le \Pi \le \frac{1}{\bar{a}}-1\right)$ para la que $p_i = p_j = p$.

Por comodidad de exposición y sin pérdida de generalidad, podemos suponer $p_1 = p_2 = p$ y el sistema se escribe del siguiente modo:

$$\begin{array}{l}
\left[1-(1+\Pi)a_{11}\right]p - (1+\Pi)a_{21}\,p - (1+\Pi)a_{31}\,p_3 - \ldots - (1+\Pi)a_{n1}\,p_n = l_1 \\
-(1+\Pi)a_{12}\,p + \left[1-(1+\Pi)a_{22}\right]p - (1+\Pi)a_{32}\,p_3 - \ldots - (1+\Pi)a_{n2}\,p_n = l_2 \\
-(1+\Pi)a_{13}\,p - (1+\Pi)a_{23}\,p + \left[1-(1+\Pi)a_{33}\right]p_3 - \ldots - (1+\Pi)a_{n3}\,p_n = l_3 \\
\quad\vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
-(1+\Pi)a_{1n}\,p - (1+\Pi)a_{2n}\,p - (1+\Pi)a_{3n}\,p_3 - \ldots + \left[1-(1+\Pi)a_{nn}\right]p_n = l_n
\end{array}$$

que es equivalente a :

$$\left\{\begin{array}{l}
\left[1-(1+\Pi)(a_{11}+a_{21})\right]p - (1+\Pi)\,a_{31}\,p_3 - \ldots - (1+\Pi)\,a_{n1}\,p_n = l_1 \\
\left[1-(1+\Pi)(a_{12}+a_{22})\right]p - (1+\Pi)\,a_{32}\,p_3 - \ldots - (1+\Pi)\,a_{n2}\,p_n = l_2 \\
-(1+\Pi)(a_{13}+a_{23})\,p + \left[1-(1+\Pi)\,a_{33}\right]p_3 - \ldots - (1+\Pi)\,a_{n3}\,p_n = l_3 \\
\quad\vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
-(1+\Pi)(a_{1n}+a_{2n})\,p - (1+\Pi)\,a_{3n}\,p_3 - \ldots + \left[1-(1+\Pi)\,a_{nn}\right]p_n = l_n
\end{array}\right. \tag{12}$$

Este sistema consta de *n* ecuaciones con *n–1* incógnitas, siendo la condición necesaria y suficiente para que admita solución, que exista, Π, $\left(0 \le \Pi < \frac{1}{\bar{a}} - 1\right)$, tal que el determinante de la matriz ampliada sea nulo:

$$\begin{vmatrix}
1-(1+\Pi)(a_{11}+a_{21}) & 1-(1+\Pi)(a_{12}+a_{22}) & \cdots & -(1+\Pi)(a_{1n}+a_{2n}) \\
-(1+\Pi)a_{31} & -(1+\Pi)a_{32} & \cdots & -(1+\Pi)a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-(1+\Pi)a_{n1} & -(1+\Pi)a_{n2} & \cdots & 1-(1+\Pi)a_{nn} \\
l_1 & l_2 & \cdots & l_n
\end{vmatrix} = 0$$

es decir, al sumar las dos primeras filas de la matriz $I-(1+\Pi)A$, obtenemos una matriz de *n–1* filas y *n* columnas; los vectores columna de esta matriz son, pues, linealmente dependientes y la relación de dependencia lineal debe mantenerse para las componentes λ_i del vector λ.

Ejemplo numérico 2

Consideremos el ejemplo expuesto por Sraffa en el capítulo IV de su obra "Producción de mercancías por medio de mercancías..." en el que se supone el siguiente sistema básico de relaciones entre industrias productoras de hierro, carbón y trigo :

$$\left(q_{ij}^{*}\right)=\begin{pmatrix} 90 & 50 & 40 \\ 120 & 125 & 40 \\ 60 & 150 & 200 \end{pmatrix} \; ; \quad \beta^{*}=\begin{pmatrix} 0 \\ 165 \\ 70 \end{pmatrix} ; \quad Q^{*}=\begin{pmatrix} 180 \\ 450 \\ 480 \end{pmatrix}$$

... con matriz tecnológica : $\quad A^{*}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.\hat{1} & 0.08\hat{3} \\ 0.\hat{6} & 0.2\hat{7} & 0.08\hat{3} \\ 0.\hat{3} & 0.\hat{3} & 0.41\hat{6} \end{pmatrix}$

... y con matriz de distribución : $\quad B^{*}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2\hat{7} & 0.\hat{2} \\ 0.2\hat{6} & 0.2\hat{7} & 0.0\hat{8} \\ 0.125 & 0.3125 & 0.41\hat{6} \end{pmatrix}$

Sraffa supuso que el trabajo empleado era el representado por el vector $l^{*}=\left(0.1875\,,\,0.3125\,,\,0.5\right)$. Entonces la evolución de los diferentes precios a medida que aumenta el tipo de beneficio que se deduce de la relación $p^{*}\left[I-\left(1+\Pi\right)A^{*}\right]=l^{*}$ sería la que se observa en el lado izquierdo de la gráfica 1 :

Posición de la FIGURA 1 *si se inserta en el texto*

En el lado derecho se observan las trayectorias relativas, que demuestran que a medida que aumenta el tipo de beneficio, el precio del hierro se vuelve cada vez relativamente mayor que el del carbón o el del trigo.

El sistema patrón correspondiente presentaría un comportamiento de los precios muy similar, recogido en la gráfica 2 :

Posición de la FIGURA 2 *si se inserta en el texto*

Ahora bien, resolviendo $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\left(\bar{a}\,I-A^{*}\right)=\left(0,0,0\right)$ se obtiene $\left(\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\alpha_3\right)=\left(\frac{11}{18}\,,\,\frac{4}{18}\,,\,\frac{3}{18}\right)$ que también se puede representar proporcionalmente como $\left(\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\alpha_3\right)=\left(1\,,\,\frac{4}{11}\,,\,\frac{3}{11}\right)$ sin pérdida de generalidad.

Con ese resultado se puede "homogeneizar" el sistema utilizando

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/11 & 0 \\ 0 & 0 & 3/11 \end{pmatrix}$$

con lo que resulta

$$\left(q_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 90 & 50 & 40 \\ 43.\overline{63} & 45.\overline{45} & 14.\overline{54} \\ 16.\overline{36} & 40.\overline{90} & 54.\overline{54} \end{pmatrix}, \quad \beta=\begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 19.\overline{09} \end{pmatrix}, \quad Q=\begin{pmatrix} 180 \\ 163.\overline{63} \\ 130.\overline{90} \end{pmatrix}$$

$$l=\left(0.1875\,,\ \frac{0.3125}{\left(4/11\right)}\,,\ \frac{0.5}{\left(3/11\right)}\right)$$

... con matriz tecnológica : $A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.30\widehat{5} & 0.30\widehat{5} \\ 0.\overline{24} & 0.2\widehat{7} & 0.\widehat{1} \\ 0.\overline{09} & 0.25 & 0.41\widehat{6} \end{pmatrix}$, $\quad \begin{matrix}\forall j \quad 1\le j\le 3 \\ \sum_i a_{ij}=\bar{a}=0{,}8\widehat{3}\end{matrix}$

... y con la misma matriz de distribución ‘B’ que el sistema original.

En este caso los precios evolucionarían del modo recogido en la gráfica 3 :

Posición de la FIGURA 3 *si se inserta en el texto*

Es decir, que a medida que aumenta el tipo de beneficio, los precios de los tres productos tienden a ser iguales.

Como se indicó anteriormente, Sraffa supuso que el trabajo empleado era el representado por el vector $l^*=\left(0.1875\,,\,0.3125\,,\,0.5\right)$. En lugar de ello, si hubiese supuesto $l^*=\left(0.46\,,\,0.04\,,\,0.5\right)$, su sistema básico hubiera proporcionado un comportamiento de los diferentes precios del tipo que se observa en la gráfica 4, donde se aprecia que los precios del carbón y del trigo se intersecarían para $\Pi\approx 0.07242175$:

Posición de la FIGURA 4 *si se inserta en el texto*

Y en el “sistema patrón” correspondiente, los precios se comportarían según lo representado en la gráfica 5 :

Posición de la FIGURA 5 *si se inserta en el texto*

Ahora bien, en este especial caso particular, también en el sistema “homogeneizado” se observaría que las curvas que representan la evolución de los precios a medida que aumenta el tipo de beneficio se intersecarían pues considerando $1+\Pi=\frac{20}{19}\approx 1.052632$, quedaría :

$$\left[I\ -\left(1+\Pi\right)A\right]\approx\frac{1}{1881}\begin{pmatrix} 891 & -605 & -605 \\ -480 & 1331 & -220 \\ -180 & -495 & 1056 \end{pmatrix}$$

y se comprueba que la solución de $p\left[I-\left(1+\Pi\right)A\right]=l=\left(0.46\,,\,0.11\,,\,1.8\widehat{3}\right)$ es

$p \approx \left(\frac{3762}{700}, \frac{3762}{700}, \frac{5225}{700}\right)$. Es decir, $p_1 = p_2$.

Sumando en $\left[I - (1+\Pi)A\right]$ la primera y la segunda filas, la matriz resultante queda

$$\frac{1}{1881}\begin{pmatrix} 411 & 726 & -825 \\ -180 & -495 & 1056 \end{pmatrix}$$

en la que la tercera columna se puede obtener multiplicando la primera por $\frac{517}{105}$ y restándole al resultado $\frac{412}{105}$ veces la segunda, relación que se mantiene entre los λ_i pues $l_3 = \frac{517}{105} l_1 - \frac{412}{105} l_2$. Y el determinante de la matriz ampliada es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} \frac{411}{1881} & , & \frac{726}{1881} & , & -\frac{825}{1881} \\ -\frac{180}{1881} & , & -\frac{495}{1881} & , & \frac{1056}{1881} \\ 0.46 & , & 0.11 & , & 1.8\overset{\frown}{3} \end{vmatrix} = 0$$

Quiere ello decir que las curvas que representan las evoluciones de los precios del hierro y del carbón se intersecarían para $\Pi \approx 0.052632$ como se aprecia (con dificultad) en la gráfica 6 :

Posición de la FIGURA 6 *si se inserta en el texto*

El “sistema homogeneizado” que acabamos de considerar, nos muestra que en un tal sistema los precios pueden perfectamente intersecarse pero, sin embargo, dado que tienden a ser todos iguales cuando Π tiende a : $\frac{1}{a} - 1$, los precios relativos de las correspondientes mercancías no pueden ser “excesivamente distintos” una vez que se cruzan.

Para una tasa de beneficio Π , lo que hace distintos los precios es la diferente configuración del vector λ . De hecho, para $\Pi=0$ y tomando $w = 1$, el valor del excedente ‘β’ es precisamente L, cualesquiera que sean los λ_i, lo que permitiría a la “sociedad de los trabajadores” repartir el excedente por unidad de trabajo desarrollado.

A medida que aumenta el tipo de beneficio, el trabajo pierde importancia en la determinación del vector de precios, y es por ello que en un “sistema homogeneizado”, a medida que aumenta Π, la diferencia entre los precios $|p_i - p_j|$ se hace cada vez más pequeña (se crucen estos o no) hasta llegar al límite de ser todos iguales cuando

$\Pi = \frac{1}{\bar{a}} - 1$.

En este último caso en que hemos utilizado los datos expuestos en el capítulo en el que se presenta el “sistema patrón” en Sraffa (1975) pero considerado por un lado que $l^* = (0.46,\ 0.04,\ 0.5) \Rightarrow l = (0.46,\ 0.11,\ 1.8\widehat{3})$, y que se “homogeneiza” el modelo, se cumple que:

si $\Pi = 0$	$p_1 \approx 3.835862$	$p_2 \approx 3.809793$	$p_3 \approx 5.877793$
si $\Pi \approx 0.052632$	$p_1 \approx 5.374286$	$p_2 \approx 5.374286$	$p_3 \approx 7.464286$
si $\Pi = 0.19$	$p_1 \approx 86.635319$	$p_2 \approx 86.709447$	$p_3 \approx 88.859135$

Si normalizamos estos precios :

para $\Pi = 0$	$p^*_1 \approx 0.283645$	$p^*_2 \approx 0.281718$	$p^*_3 \approx 0.434637$
para $\Pi \approx 0.052632$	$p^*_1 \approx 0.295082$	$p^*_2 \approx 0.295082$	$p^*_3 \approx 0.409836$
para $\Pi = 0.19$	$p^*_1 \approx 0.330412$	$p^*_2 \approx 0.330695$	$p^*_3 \approx 0.338893$

Como se observa, y como era de esperar, las diferencias entre los precios relativos de las mercancías disminuyen a medida que aumenta el tipo de beneficio.

Figuras:

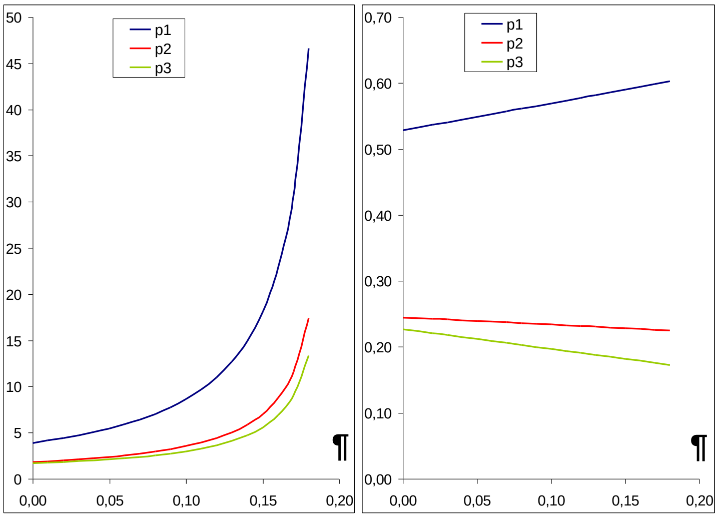

Figura 1 □ Gráfica 1

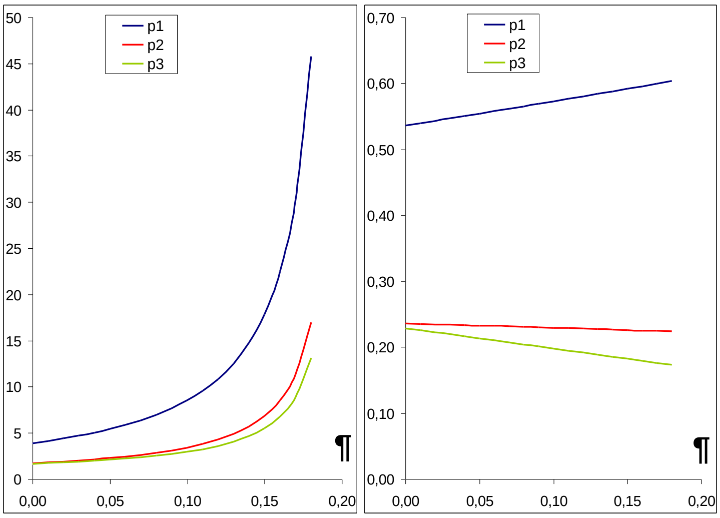

Figura 2 □ Gráfica 2

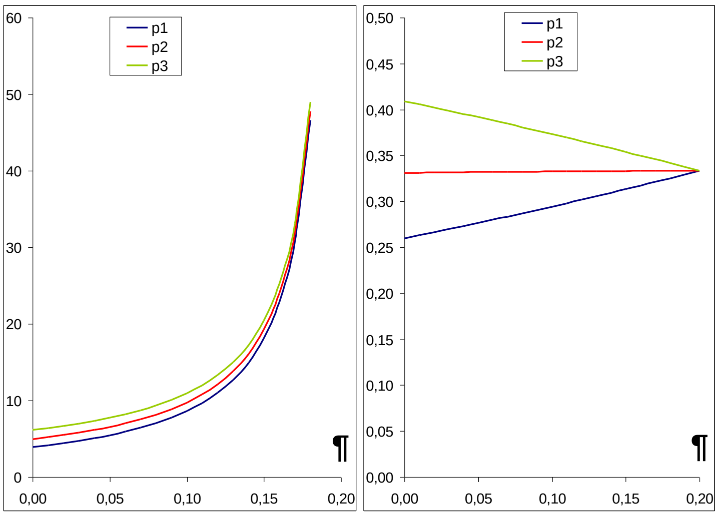

Figura 3 □ Gráfica 3

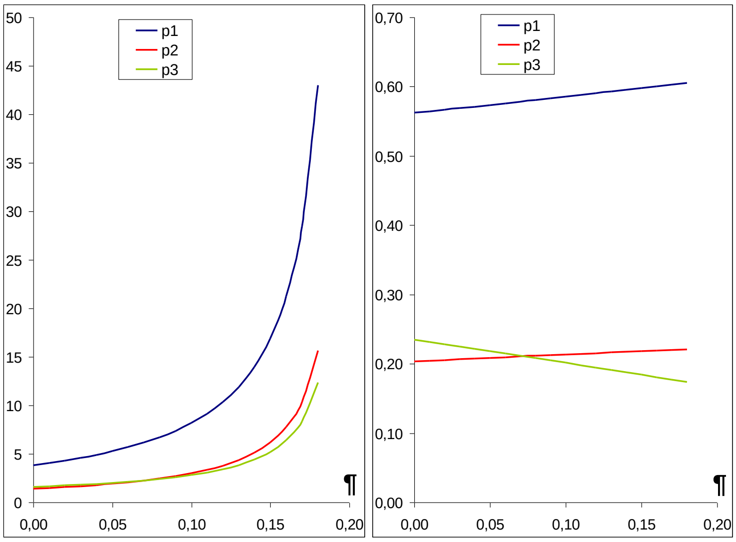

Figura 4 □ Gráfica 4

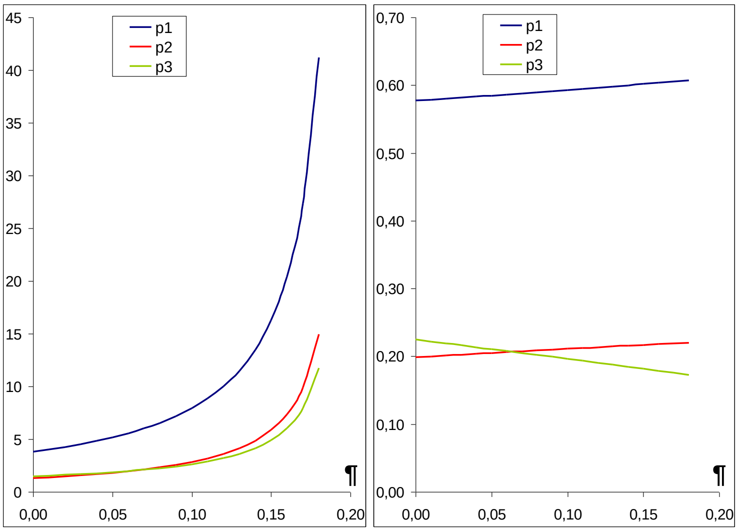

Figura 5 □ Gráfica 5

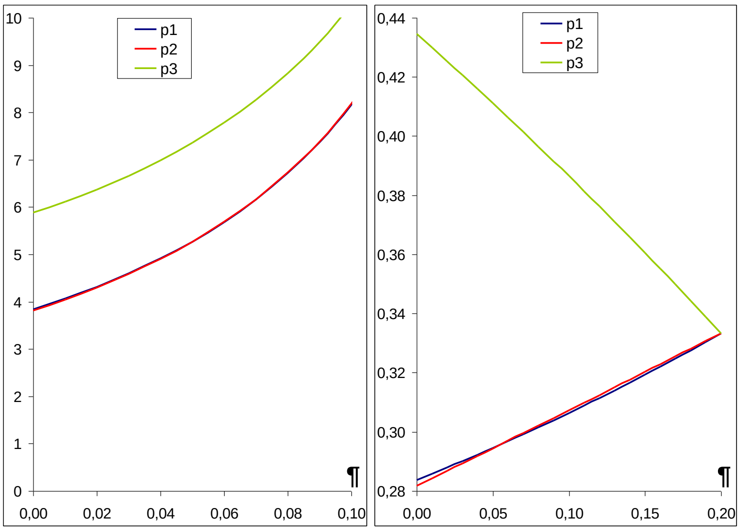

Figura 6 □ Gráfica 6

7 Referencias

Bourbaki, N. (1967): Théories spectrales, cap. 1: “Algèbres normées”. (Paris, Hermann).

Debreu, G.; Herstein, I.N. (1953): “Nonnegative Square Matrices”, **Econometrica, 21**, pp. 597-607.

Gantmakher (1966): Théorie de matrices, t. 2. (Paris, Dunod).

Leontief, W. (1951): The Structure of American Economy 1919-1939. (New York, Oxford University Press).

Maddox, I.J. (1980): “Infinite Matrices of Operators”, **Lecture Notes in Mathematics, vol. 786**. Springer Verlag.

McKenzie, L. (1959): “Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory”, en: Arrow, Karlin y Suppes (eds) **Mathematical Methods in the Social Sciences** (Stanford University Press)

Pasinetti, L.L. (1983): Lecciones de teoría de la producción. (Madrid, Fondo de Cultura Económica).

Quiñoá, J.L. (1983): Inversibilidad en álgebras de Banach de matrices infinitas y aplicación a los sistemas de ecuaciones de orden infinito. (Zaragoza, Tesis doctoral)

Quiñoá, J.L. (1992): “Sur un type de matrice infinie de diagonale dominante dans la thèorie économique”, European Meeting of the Econometric Society. (Bruselas).

Quiñoá, J.L. (2011): “Topologías en espacios de matrices y sistemas Leontief y Leontief-Sraffa”, en http://www.ecap.uab.es/RePEc/doc/Quino_01-2011.pdf

Schaefer, H.H. (1975): Espacios vectoriales topológicos (Barcelona, Teide).

Sraffa, P. (1975): Producción de mercancías por medio de mercancías: preludio a una crítica de la teoría económica. (Barcelona, Oikos-Tau).

APÉNDICE MATEMÁTICO

1. ÁLGEBRA DE BANACH *Mn* (R)

Denotaremos *Mn* (R) el conjunto de matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales. Para $A = (a_{ij}) \in Mn$ (R) i es el índice de la fila y j el de la columna.

Dados $A = (a_{ij}) \in Mn$ (R)

$B = (b_{ij}) \in Mn$ (R)

$\lambda \in$ R

y con las operaciones habituales

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda A = (\lambda\, a_{ij})$$

de suma y producto por un escalar, *Mn* (R) es un espacio vectorial sobre R.

Además, en *Mn* (R) disponemos de otra ley de composición interna, producto de matrices cuadradas:

$$A \,.\, B = (a_{ij}) \,.\, (b_{ij}) = (\gamma_{ij})$$

donde

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

el producto es asociativo $\forall\, A, B, C \in Mn$ (R): $A \,.\, (B \,.\, C) = (A \,.\, B) \,.\, C$

es distributivo respecto de la suma $\forall\, A, B, C \in Mn$ (R): $A\,(B + C) = A \,.\, B + A \,.\, C$

admite un elemento neutro, matriz identidad I.

Proposición 1.

Las aplicaciones

$$Mn\,(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}_+ = \{x \in \mathrm{R} \,/\, x \geq 0\}$$

$$\text{a) } A = (a_{ij}) \to \|A\| = \sup_{j} \sum_{i=1}^{n} |\, a_{ij} \,|$$

$$\text{b) } A = (a_{ij}) \to \|A\|^{*} = \sup_{i} \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,|$$

son normas en Mn (R).

Demostremos a) –la demostración de b) es equivalente–:

1) $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0 \Leftrightarrow \sup_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 0 \Leftrightarrow \forall\, i, j \;\; a_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2) $\forall \lambda \in$ R, $\|\lambda\, A\| = \sup_j \sum_{i=1}^{n} |\lambda\, a_{ij}| = |\lambda|\, \|A\|$

3) $\forall\, A, B \in Mn$ (R), $\|A + B\| = \sup_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sup_j \sum |a_{ij}| + \sup_j \sum |b_{ij}| = \|A\| + \|B\|$

Mn (R) es, pues, un espacio vectorial normado.

Proposición 2.

Mn (R) es completo. Tenemos que demostrar que toda sucesión de Cauchy $(A^t)_t$ de elementos de Mn (R) es convergente en Mn (R).

Denotando $A^t = \left(a_{ij}^t\right)$ como $(A^t)_t$ es de Cauchy en Mn (R),

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, t_0 \in \mathrm{N} \,/\quad p \geq t_0, \quad q \geq t_0 \Rightarrow \left\|A^p - A^q\right\| < \varepsilon$$

pero $$\left\|A^p - A^q\right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \sup_j \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}^p - a_{ij}^q\right| < \varepsilon$$

en particular, fijados i y j, $\left|a_{ij}^p - a_{ij}^q\right| < \varepsilon$

por lo que la sucesión de números reales $\left(a_{ij}^t\right)_t$ es de Cauchy en R completo y converge a un número real que denotaremos a_{ij}.

Demostremos ahora que $(A^t)_t$ converge a $A=(a_{ij})$ en Mn (R). Sea $\varepsilon \in$ R, $\varepsilon >$ 0, como $\left(a_{ij}^t\right)_t$ converge en R a a_{ij},

$$\exists\, t\,(i, j) \in \mathrm{N} \,/\quad t \geq t\,(i, j) \;\Rightarrow\; \left|a_{ij}^t - a_{ij}\right| < \frac{\varepsilon}{n}$$

tomemos

$$t_0 = \sup\ \left\{t\,(i, j), \quad 1 \leq i \leq n,\; 1 \leq j \leq n\right\}$$

entonces $\forall t \geq t_0$ y $\forall j$, $1 \leq j \leq n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}^t - a_{ij}\right| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

de donde resulta

$$\sup_j \left(\sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij}^t - a_{ij} \right| \right) < \varepsilon$$

o aun

$$\left\| A^t - A \right\| < \varepsilon$$

lo que demuestra que la sucesión $(A^t)_t$ converge a A.

Proposición 3.

$$\forall\ A, B \in Mn\,(\mathrm{R}), \quad \left\| A \cdot B \right\| \leq \left\| A \right\| \cdot \left\| B \right\|$$

Sea $A \,.\, B = (\gamma_{ij})$, con

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

tenemos:

$$\left\| A \cdot B \right\| = \left\| \left(\gamma_{ij} \right) \right\| = \sup_j \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \gamma_{ij} \right| \right) = \sup_j \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \right| \leq \sup_j \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| a_{ik}\, b_{kj} \right| \leq$$

$$\leq \sup_j \sum_{i=1}^{n} \left| b_{ij} \right| \left(\sum_{k=1}^{n} \left| a_{ki} \right| \right) \leq \left\| A \right\| \sup_j \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} \right) = \left\| A \right\| \cdot \left\| B \right\|$$

La norma elegida es, pues, “compatible” con el producto de matrices. Además, es evidente que la norma de la matriz de identidad es 1:

$$\left\| I \right\| = 1$$

Resumiendo lo expuesto en las proposiciones 1, 2 y 3, podemos afirmar que *Mn* (R) es un *álgebra de Banach con unidad I*.

Cabe resaltar que, respecto de la norma

$$\left\| A \right\|^* = \sup_i \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|$$

que denominaremos “*norma dual*”, *Mn* (R) es también un álgebra de Banach con unidad *I*. La demostración es similar a la efectuada y utilizaremos una u otra según convenga al contexto en el que nos encontremos.

2. EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO

Demostramos que Mn (R) es un álgebra de Banach y luego en particular es un *espacio métrico completo* dotado de la distancia

$$d: Mn\,(\mathrm{R}) \times Mn\,(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}_+$$

$$(A, B) \to d\,(A, B) = \|A - B\|$$

Definición.

Sea (E, d) un espacio métrico –por ejemplo, Mn (R)– y

$$\varphi: E \to E$$

$$x \to \varphi\,(x)$$

diremos que φ es una contracción en E si $\exists\, k \in \mathrm{R}, \quad 0 \leq k < 1$ tal que

$$\forall x, y \in E, \qquad d\left(\varphi(x),\varphi(y)\right) \leq k\, d\,(x, y)$$

Definición.

Diremos que $\bar{x}$ es punto fijo de φ, contracción en E, si $\varphi\,(\bar{x}) = \bar{x}$

Teorema del punto fijo.

En un espacio métrico completo, toda contracción φ admite un punto fijo único $\bar{x}$ y, además, $\forall x_0 \in E$ la sucesión iterativa construida a partir de x_0:

$$x_0,\; x_1 = \varphi\,(x_0),\; \ldots,\; x_n = \varphi\,(x_{n-1}),\; \ldots$$

converge a $\bar{x}$.

En efecto, sea $\qquad x_0 \in E$ y $x_n = \varphi\,(x_{n-1}),\; n \geq 1$

Tenemos:

$$\begin{aligned}
&d\,(x_1, x_2) = d\left(\varphi(x_0), \varphi(x_1)\right) \leq k\, d\,(x_0, x_1)\\
&d\,(x_2, x_3) = d\left(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\right) \leq k\, d\,(x_1, x_2) \leq k^2\, d\,(x_0, x_1)\\
&\ldots\\
&d\,(x_n, x_{n+1}) \leq k^n\, d\,(x_0, x_1)\\
&\ldots\\
&d\left(x_n, x_{n+p}\right) \leq d\,(x_n, x_{n+1}) + d\,(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}\right) \leq\\
&\qquad\qquad \leq k^n\, d\,(x_0, x_1)\left(1 + k + \ldots + k^p + \ldots\right) \leq\\
&\qquad\qquad \leq k^n\, d\,(x_0, x_1) \cdot \frac{1}{1+k} \quad (\text{porque } 0 \leq k < 1)
\end{aligned}$$

término este que tiende a cero cuando $n \to +\infty$, por lo que la sucesión $(x_n)_n$ es de Cauchy en E completo, y admite un límite $\bar{x}$.

Dado que toda contracción es una aplicación continua (incluso uniformemente continua), tenemos:

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \bar{x}$$

y $\bar{x}$ es punto fijo de φ.

Demostremos que $\bar{x}$ es único. Supongamos que $\bar{x}'$ también es punto fijo.

Tenemos: $d(\bar{x},\bar{x}') = d(\varphi(\bar{x}),\varphi(\bar{x}')) \leq k\, d(\bar{x},\bar{x}')$

y siendo k, $0 \leq k < 1$, lo anterior sólo puede darse si $d(\bar{x},\bar{x}') = 0$, es decir, que $\bar{x} = \bar{x}'$.

Teorema 1.

Para que $A \in Mn$ (R) sea inversible en Mn (R), es necesario y suficiente que exista $D \in Mn$ (R), D inversible y tal que

$$\left\| I - A D^{-1} \right\| = K < 1$$

En efecto, si A es inversible, tomando $D = A$ tenemos

$$\left\| I - A \cdot A^{-1} \right\| = 0 < 1$$

Recíprocamente, supongamos que existe D inversible tal que

$$\left\| I - A D^{-1} \right\| = k < 1$$

Entonces, la aplicación

$$\Phi : Mn\,(\mathrm{R}) \to Mn\,(\mathrm{R}) :$$

$$\Phi\,(x) = D^{-1} + x\left(I - A D^{-1}\right)$$

es tal que

$$\left\| \Phi\,(x) - \phi\,(x') \right\| = \left\| (x - x')\left(I - A D^{-1}\right) \right\| \leq \left\| x - x' \right\| \cdot \left\| I - A D^{-1} \right\|$$

(porque Mn (R) es un álgebra de Banach).

Siendo $\left\| I - A D^{-1} \right\| = k < 1$ tenemos:

$$d\left(\Phi\,(x), \Phi\,(x')\right) = \left\| \Phi\,(x) - \Phi\,(x') \right\| \leq k \left\| x - x' \right\| = k\, d\,(x, x')$$

y Φ es contracción en Mn (R) completo, por lo que admite un punto fijo único $\bar{x}$.

Siendo $\bar{x}$ punto fijo de Φ, $\Phi(\bar{x}) = \bar{x}$ o aun $D^{-1} + \bar{x}\left(I - A D^{-1}\right) = \bar{x}$ de donde $\bar{x} A D^{-1} = D^{-1}$ y multiplicando por D a la derecha, $\bar{x} A = I$ y $\bar{x}$ es la inversa de A.

Además, $\forall\ x_0 \in Mn$ (R) la sucesión $x_0,\ x_1 = \Phi(x_0), \ldots,\ x_n = \phi(x_{n-1}), \ldots$ converge a $\bar{x} = A^{-1}$ (Teorema del punto fijo).

Corolario.

Con las anotaciones del teorema anterior $\forall l \in R^n$,

$$\begin{aligned} \varphi : R^n &\longrightarrow R^n \\ p &\longrightarrow lD^{-1} + p\left(I - AD^{-1}\right) \end{aligned}$$

es una contracción en R^n que admite un punto fijo único $\bar{p}$ solución de $pA = l$, $\forall\ p^0 \in R^n$, $\bar{p}$ es el limite de la sucesión iterativa:

$$p^0,\ p^1 = \varphi\left(p^0\right), \ldots\ldots,\ p^n = \varphi\left(p^{n-1}\right), \ldots\ldots$$

En efecto, tomando como norma en R^n, $\|p\| = \sup_i |p_i|$ tenemos:

$$\begin{aligned} &\|\varphi(p) - \varphi(p')\|_{R^n} = \left\|(p - p')\left(I - AD^{-1}\right)\right\|_{R^n} \leq \left\|I - AD^{-1}\right\|_{Mn(R)} \|p - p'\|_{R^n} \\ &= k\|p - p'\| \qquad con \quad k < 1 \end{aligned}$$

Por lo que φ es una contracción en R^n, que admite un punto fijo único $\bar{p}$ al que $\forall\ p^0 \in R^n$ converge la sucesión iterativa:

$$p^0,\ p^1 = \varphi\left(p^0\right), \ldots\ldots,\ p^n = \varphi\left(p^{n-1}\right), \ldots\ldots$$

y tenemos $\varphi(\bar{p}) = \bar{p}$, $lD^{-1} + \bar{p} - \bar{p}AD^{-1} = \bar{p}$ a lo que es lo mismo $\bar{p}A = l$.

Definición.

Sea $A = (a_{ij}) \in Mn$ (R), diremos que A es de diagonal dominante por columnas si $\forall\ j,\ \ 1 \leq j \leq n,\quad \left|a_{jj}\right| > \sum_{i \neq j} \left|a_{ij}\right|$.

De forma similar diremos que A es diagonal dominante por filas si

$$\forall\ i,\ \ 1 \le i \le n,\ |a_{ii}| > \sum_{j \ne i} |a_{ij}|\ .$$

Definición.

Sea $A = (a_{ij}) \in Mn$ (R), diremos que A es de tipo Leontief si

$$\begin{cases} a_{ii} > 0 & \forall i \\ a_{ij} \le 0 & \text{si } i \ne j \end{cases}$$

Teorema 2.

Si $A = (a_{ij}) \in Mn$ (R) es Leontief diagonal dominante por columnas, A es inversible en Mn (R) y, además, $A^{-1} \ge 0$.

Siendo A diagonal dominante y Leontief, $\forall\ j,\ \ 1 \le j \le n$,

$$a_{jj} > \sum_{i \ne j} |a_{ij}|$$

consideraremos, entonces, la matriz $D = (d_{ij})$ definida por

$$d_{jj} = a_{jj}$$

$$d_{ij} = 0 \qquad \text{si } i \ne j.$$

Necesariamente

$$d_{jj} = a_{jj} > 0$$

por lo que la matriz diagonal D es inversible en Mn (R) y siendo A diagonal dominante, $\exists\ k \in$ R, $0 \le k < 1$, tal que

$$\left\| I - A\,D^{-1} \right\| = \sup_j \left[\frac{1}{a_{jj}} \left(\sum_{i \ne j} |a_{ij}| \right) \right] \le k < 1$$

por lo que la aplicación

$$\Phi : Mn\,(\mathrm{R}) \to Mn\,(\mathrm{R}) :$$

$$\Phi\,(x) = D^{-1} + x\,\left(I - A\,D^{-1}\right)$$

es una contracción en Mn (R) y admite un punto fijo único $\bar{x} = A^{-1}$.

Además, dado que $D^{-1} \ge 0$ y $\left(I - A\,D^{-1}\right) \ge 0$ partiendo de $x_0 \ge 0$, la sucesión $x_0,\ x_1 = \Phi\,(x_0), \dots,\ x_n = \phi\,(x_{n-1}), \dots$ es tal que $x_n \ge 0 \quad \forall\ n$ y, en consecuencia, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = \bar{x} = A^{-1} \ge 0$.

Para las matrices Leontief diagonal dominantes por filas tenemos un resultado equivalente considerando ahora la aplicación

$$\Phi : Mn\,(\mathrm{R}) \to Mn\,(\mathrm{R}) :$$

$$\Phi\,(x) = D^{-1} + \left(I - D^{-1}A\right)\,x$$

Teorema 3.

Si $A \in Mn\,(\mathrm{R})$ y λ es autovalor de A, se tiene $|\lambda| \le \|A\|$.

Sea λ autovalor de A, entonces $\exists\; x \in \mathrm{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $A\,x = \lambda\,x$ o, lo que es lo mismo, $\det\left(\lambda I - A\right) = 0$ o $\lambda\,I - A$ no inversible en $Mn\,(\mathrm{R})$.

Entonces (teorema 1), para toda matriz D inversible se tiene:

$$\left\| I - \left(\lambda\,I - A\right)D^{-1} \right\| \ge 1$$

si $\lambda = 0$, ello significa que A es no inversible y, obviamente,

$$|\lambda| = 0 \le \|A\|$$

Supongamos $\lambda \neq 0$ y consideremos la matriz diagonal $D = (d_{ij})$ donde

$$d_{ii} = \lambda \quad \text{y} \quad d_{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

Tenemos $\left\| I - \left(\lambda\,I - A\right)D^{-1} \right\| = \sup\limits_{j} \left[\dfrac{1}{\lambda}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \right] = \dfrac{1}{\lambda}\|A\|$ y como debe ser $\dfrac{1}{|\lambda|}\|A\| \ge 1$, resulta $|\lambda| \le \|A\|$.

Teorema 4.

a) Sea $A \in Mn\,(\mathrm{R})$, $A \ge 0$ y tal que $\forall\, j$, $1 \le j \le n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \bar{a} = \|A\|$$

entonces $\bar{a}$ es autovalor real máximo de A que admite $\bar{1} = (1,...,1)$ como autovector por la izquierda.

b) Sea $A \in Mn\,(\mathrm{R})$, $A \ge 0$ y $\lambda \in \mathrm{R}$, tal que $\lambda > \|A\|$ entonces $(\lambda\,I - A)$ es inversible y $(\lambda\,I - A)^{-1} \ge 0$.

Demostración.

a) Resulta que $\bar{1}\;A = \bar{a}\;\bar{1}$ y $\bar{a}$ es autovalor real. Por otra parte, dado que para todo autovalor λ, $|\lambda| \leq \|A\|$ (teorema 3), resulta que $\bar{a}$ es autovalor máximo.

b) Consideremos la matriz $D = (d_{ij})$ donde $d_{ii} = \lambda$ y $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Tenemos que $\left\| I - (\lambda\, I - A)\, D^{-1} \right\| = \dfrac{\|A\|}{\lambda} < 1$ y la aplicación

$$\Phi : Mn\ (\mathrm{R}) \to Mn\ (\mathrm{R}) :$$

$$\Phi\ (x) = D^{-1} + x\ \left(I - (\lambda\, I - A)\, D^{-1}\right)$$

es una contracción en Mn (R) que admite un punto fijo único $\bar{x} = (\lambda\, I - A)^{-1}$ y dado que $D^{-1} \geq 0$ y $I - (\lambda\, I - A)\, D^{-1} \geq 0$, partiendo de $x_0 \geq 0$, la sucesión

$$x_0,\ x_1 = \Phi\ (x_0), \ldots,\ x_n = \Phi\ (x_{n-1}), \ldots$$

es tal que $x_n \geq 0 \quad \forall n$, por lo que $\bar{x} = (\lambda\, I - A)^{-1} = \lim\ x_n \geq 0$.

Corolario.

El autovalor máximo $\bar{a}$ de $A \geq 0$ es el extremo inferior del conjunto:

$$T\,(A) = \left\{ a \in R \,/\, \forall\, \lambda \in (a, +\infty),\ (\lambda\, I - A) \text{ inversible y } (\lambda\, I - A)^{-1} \geq 0 \right\}$$

Teorema 5 (de Perron-Frobenius).

Toda matriz $A \in Mn$ (R), $A \geq 0$, A irreducible admite un autovalor máximo $\bar{a}$ real y estrictamente positivo, al que corresponde un autovector $\bar{x}$ positivo (admitido por sobradamente conocido).